Contenido

Teoría de grafos

- Es una disciplina antigua con muchas aplicaciones modernas
- Las bases fueron dadas por el matemático suizo Leonard Euler en el siglo XVIII (problema de los puentes de Königsberg)
- Los grafos se emplean para resolver problemas de muchas áreas (circuitos electrónicos, estructuras de compuestos químicos, estructura de Internet, caminos mas cortos entre dos ciudades, etc)

Grafos

Son estructuras discretas consistentes en vértices (vertex) y aristas (edges) que conectan esos vértices.

Hay varios tipos distintos de grafos, que se diferencian entre sí por el tipo y el número de aristas que pueden conectar cada par de vértices.

Tipos de Grafos

Grafos simples

Un grafo simple $G = (V, E)$ consta de un conjunto no vacío de vértices V, y E, un conjunto de parejas no ordenadas de elementos distintos de V llamadas aristas.

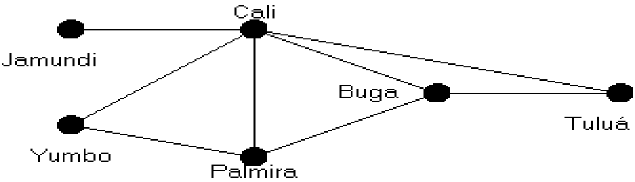

Figura: ejemplo de un grafo simple

$$E = \{\{Jamundi, Cali\}, \{Yumbo, Cali\}, \{Yumbo, Palmira\}, \ldots\}$$

Tipos de Grafos (2)

Multigrafo

Un multigrafo $G = (V, E)$ consta de un conjunto V de vértices, un conjunto E de aristas, y una función f de E en $\{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$.
Las aristas e_1 y e_2 son llamadas aristas múltiples o paralelas si $f(e_1) = f(e_2)$.

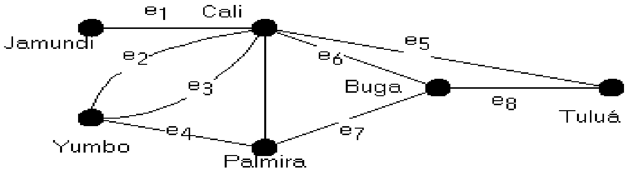

Figura: ejemplo de un multigrafo

$f(e_1) = \{Jamundi, Cali\}$ y $f(e_3) = \{Yumbo, Cali\}$

Tipos de Grafos (3)

Pseudografo

Un pseudografo $G = (V, E)$ consta de un conjunto V de vértices, un conjunto E de aristas, y una función f de E en $\{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$.
Una arista e es un bucle o lazo, si $f(e) = \{u, u\} = \{u\}$ para algún $u \in V$.

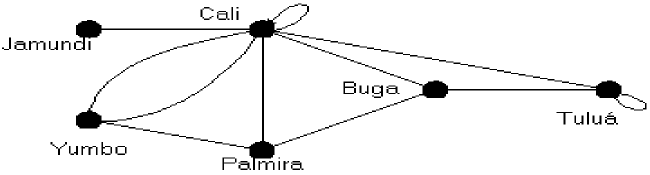

Figura: ejemplo de un pseudografo

$\{Cali, Cali\}$ y $\{Tulua, Tulua\}$ son bucles.

Tipos de Grafos (4)

Grafo dirigido

Un grafo dirigido $G = (V, E)$ consta de un conjunto V de vértices y un conjunto E de aristas que son parejas de elementos de V.

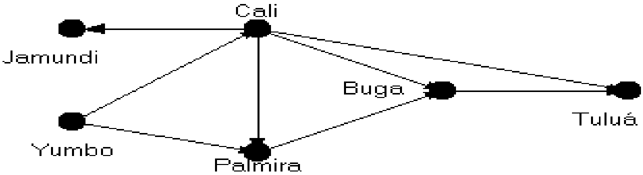

Figura: ejemplo de un grafo dirigido

$$E = \{(Cali, Jamundi), (Yumbo, Cali), (Yumbo, Palmira), \ldots\}$$

Tipos de Grafos (5)

Multigrafo dirigido

Un multigrafo dirigido $G = (V, E)$ consta de un conjunto V de vértices, un conjunto E de aristas y una función f de E en $\{(u, v) \mid u, v \in V\}$.
Las aristas e_1 y e_2 son llamadas aristas múltiples si $f(e_1) = f(e_2)$.

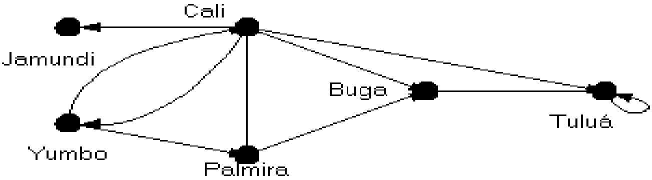

Figura: ejemplo de un multigrafo dirigido

No tiene aristas múltiples pues $(Yumbo, Cali) \neq (Cali, Yumbo)$

Contenido

Incidencia e Adyacencia

Dos vértices u y v en un grafo no dirigido G son llamados adyacentes (o vecinos) en G si $\{u, v\}$ es una arista de G.
Si $e = \{u, v\}$, la arista e es llamada incidente con los vértices u y v.
Se dice que la arista e conecta a u y v.
Los vértices u y v son llamados puntos finales (extremos) de la arista $\{u, v\}$.

Incidencia y Adyacencia (2)

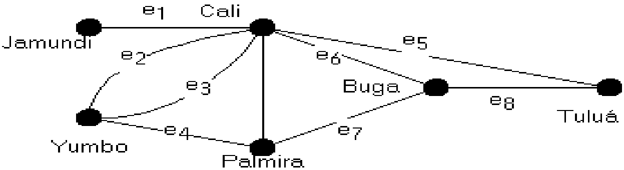

Figura: ejemplo incidencia

Los vértices *Yumbo* y *Cali* son adyacentes.
e_2, es incidente con los vértices *Yumbo* y *Cali* (los conecta).
Los vértices *Yumbo* y *Cali* son los puntos finales (extremos) de la arista e_2.

Terminología Básica

Grado

El grado de un vértice en un grafo no dirigido es el numero de aristas incidentes con el.

Nota: un bucle en un vértice contribuye dos veces al grado de ese vértice.

El grado de un vértice es denotado por deg(v).

Ejemplo: Con base en el grafo de la diapositiva 7 tenemos: $deg(Jamundi) = 1$ y $deg(Cali) = 8$.

Terminología Básica (2)

Teorema del apreton de manos

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido con e aristas. Entonces:

$$2e = \sum_{v \in V} deg(v)$$

Ejemplo2: Con base en el grafo G de la diapositiva 7 tenemos:
$deg(Jamundi) = 1$ $deg(Cali) = 8$ $deg(Yumbo) = 3$
$deg(Palmira) = 3$ $deg(Buga) = 3$ $deg(Tuluá) = 4$ y $\mid E \mid = 11$

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 1 + 8 + 3 + 3 + 3 + 4 = 22 = 2(11)$$

Ejercicio: Cuantas aristas hay en un grafo con 4 vértices con grados deg(a)=2, deg(b)=3, deg(c)=1, deg(d)=2 ?

Terminología Básica (3)

Teorema

Un grafo no dirigido tiene un número par de vértices de grado impar.

Ejemplo: Del ejemplo anterior tenemos que los únicos vértices de grado impar son:

$V_{gradoimpar} = \{Jamundi, Yumbo, Palmira, Buga\}$ y

$\mid V_{gradoimpar} \mid = 4$ que es una cantidad par.

Contenido

Terminología Básica-dirigidos

Incidencia/Adyacencia

Cuando (u, v) es una arista del grafo G con aristas dirigidas, se dice que u es adyacente a v y se dice que v es adyacente desde u.

El vértice u es llamado vértice inicial y v es llamado vértice final o terminal.

Nota: El vértice inicial y final de un bucle es el mismo.

Terminología Básica-dirigidos (2)

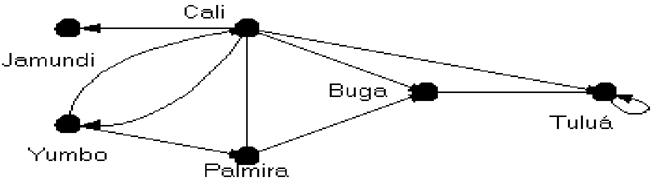

Figura: ejemplo incidencia en un grafo dirigido

El vértice *Yumbo* es adyacente a *Cali*.
El vértice *Cali* es adyacente desde *Yumbo*.
Yumbo es el vértice inicial y *Cali* es el vértice final.

Terminología Básica-dirigidos (3)

Grado

En un grafo con aristas dirigidas el grado de entrada de un vértice v, denotado por $deg^{-}(v)$, es el numero de aristas con v como su vértice terminal.

El grado de salida de v, denotado por $deg^{+}(v)$, es el numero de aristas con v como su vértice inicial.

Nota: en un bucle un vértice contribuye tanto al grado de entrada como al grado de salida.

Terminología Básica-dirigidos (4)

Teorema 3

Sea $G = (V, E)$ un grafo con aristas dirigidas. Entonces:

$$\sum_{v \in V} deg^{-}(v) = \sum_{v \in V} deg^{+}(v) = \mid E \mid$$

Ejercicio: verificar con la construcción de ejemplos.

Contenido

Clases de grafos simples

Grafo Completo

Un Grafo completo denotado por K_n, es el grafo simple que contiene exactamente una arista entre cada par de vértices distintos.

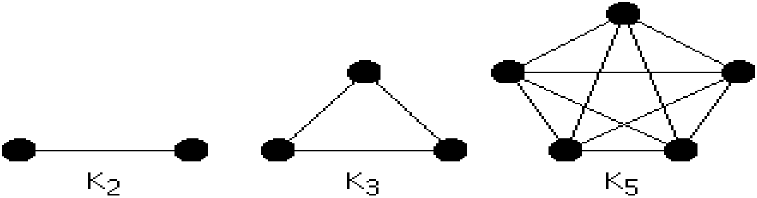

Figura: ejemplos de grafos completos

Clases de grafos simples (2)

Ciclos

Un Ciclo, denotado por C_n, para $n \geq 3$, consta de n vértices $v_1, v_2, ..., v_n$ y aristas $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\} y v_n, v_1$.

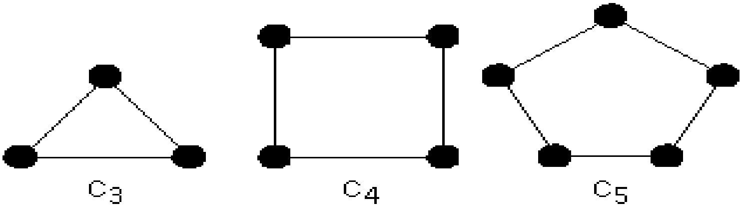

Figura: ejemplos de ciclos

Clases de grafos simples (3)

Ruedas

Una Rueda, denotado por W_n, para $n \geq 3$, se obtiene cuando a un ciclo se le adiciona un nuevo vértice y este se conecta a los n vértices existentes.

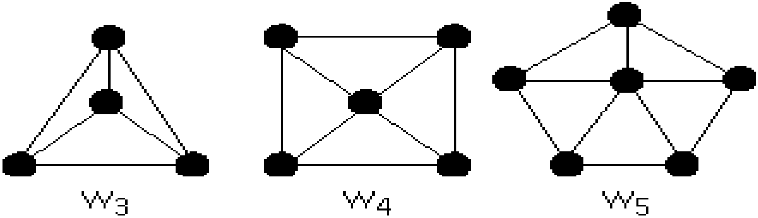

Figura: ejemplos de ruedas

Clases de grafos simples (4)

n-Cubos

Un n-Cubo, denotado por Q_n, es el grafo que tiene vértices que representan las $2n$ cadenas de bits de longitud n. dos vértices son adyacentes si y solo si las cadenas que representan difieren en solo un bit.

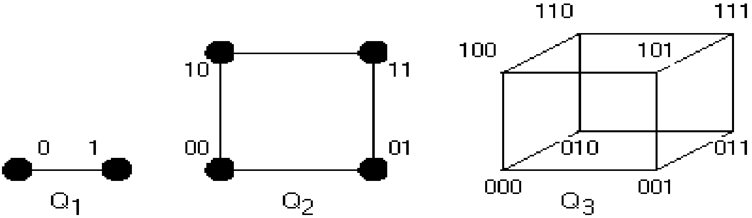

Figura: ejemplos de cubos

Contenido

Grafos bipartitos

Un grafo simple es bipartito si su conjunto de V de vértices se puede dividir en dos conjuntos disyuntos V_1 y V_2 tales que cada arista del grafo conecta un vértice de V_1 con un vértice de V_2.

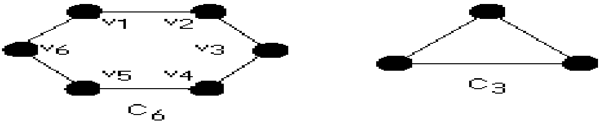

Figura: ejemplos de grafos bipartitos

C_6 es bipartito siendo $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ y $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$.
C_3 no es bipartito.

Grafos bipartitos Completos

El grafo bipartito completo $K_{m,n}$ es el conjunto de vértices conformado por dos subconjuntos con m y n vértices, respectivamente, y hay una arista entre dos vértices si y solo si, un vértice está en el primer subconjunto y el otro vértice en el segundo subconjunto.

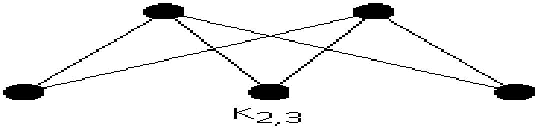

Figura: ejemplos de grafos bipartitos completos

Subgrafos

Subgrafos

Un subgrafo de un grafo $G = (V, E)$ es un grafo $H = (W, F)$ donde $W \subseteq V$ y $F \subseteq E$

Union de grafos

La unión de 2 grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ es el grafo simple con el conjunto de vértices $V_1 \cup V_2$ y el conjunto de aristas $E_1 \cup E_2$.
La unión de $G1$ y $G2$ es denotada por $G_1 \cup G_2$