

# Contenido

## Circuitos de Euler

Definición

Algoritmo para determinar circuitos eulerianos

## Circuitos de Hamilton

# Contenido

## Circuitos de Euler

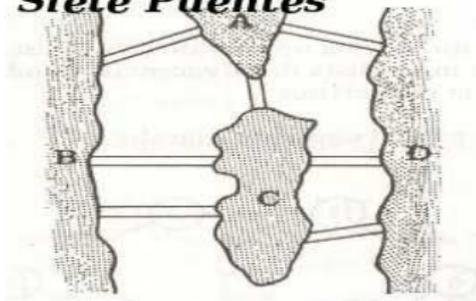
Definición

Algoritmo para determinar circuitos eulerianos

## Circuitos de Hamilton

# Caminos de Euler

**Rusia -  
Konigsberg  
Siete Puentes**



**Euler --  
1736**

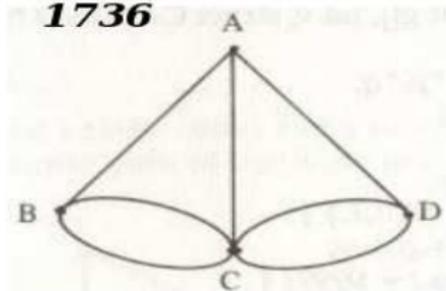


Figura: Ciudad de konigsberg

**Reseña histórica:** Los ciudadanos tomaban largas caminatas los domingos. Ellos se preguntaron si era posible iniciar en un sitio, cruzar por todos los puentes una sola vez, y regresar al punto de partida.

# Contenido

## Circuitos de Euler

### Definición

Algoritmo para determinar circuitos eulerianos

## Circuitos de Hamilton

## Circuitos de Euler (2)

el matemático suizo Leonhard Euler resolvió este problema en 1736 (primera vez en que se utilizó por primera vez la teoría de grafos).

### Circuitos y caminos de Euler

Un **circuito Euleriano** en un grafo  $G$  es un **circuito simple que contiene cada arista** de  $G$ .

Un **camino Euleriano** en  $G$  es un **camino simple que contiene cada arista** en  $G$ .

## Circuitos de Euler (3)

**Ejercicio:** Cuales de los siguientes grafos tienen circuitos o caminos Eulerianos ?

(Nota:  $V_G = V_H = V_F = \{a, b, c, d, e\}$ )

- ▶  $E_F = \{\{a, b\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{d, e\}, \{b, e\}\}$
- ▶  $E_G = \{\{a, b\}, \{b, e\}, \{a, e\}, \{e, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$
- ▶  $E_H =$   
 $\{\{a, b\}, \{b, e\}, \{a, e\}, \{e, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{b, c\}, \{a, d\}\}$
- ▶  $V_I = \{a, b, c, d, e, f, g\}$   
 $E_I = \{(a, g), (g, c), (c, b), (b, g), (g, e), (e, d), (d, f), (f, a)\}$
- ▶  $V_J = \{a, b, c, d\}$   
 $E_J = \{(a, b), (b, c), (c, a), (d, b), (c, d)\}$

## Circuitos de Euler (4)

### Teorema 1

Un **multigrafo conexo** tiene un **circuito Euleriano** si y solo si cada vértice tiene **grado par**.

### Teorema 2

Un tiene un **camino Euleriano** pero no un circuito Euler si y solo si tiene **exactamente 2 vértices de grado impar**.

# Contenido

## Circuitos de Euler

Definición

Algoritmo para determinar circuitos eulerianos

## Circuitos de Hamilton

# Circuitos de Euler (5)

## Algoritmo para la construcción de circuitos eulerianos

**Procedimiento** *Euler* ( $G$ : multigrafo conexo con todos los vertices de grado par)

**circuito** = circuito en  $G$  que comienza en un vertice elegido arbitrariamente

$H$  = grafo obtenido al eliminar de  $G$  las aristas de **circuito**

**Mientras**  $H$  tiene aristas

**Inicio**

**subcircuito** = un circuito en  $H$  que inicia en un vertice de **circuito**

$H$  = grafo obtenido al eliminar de  $G$  las aristas de **subcircuito** y todos los vertices aislados

**circuito** = **circuito** con **subcircuito** insertado en el vertice apropiado

**Fin** (**circuito** es un circuito euleriano)

## Circuitos de Euler (6)

**Ejercicio:** Existen circuitos Eulerianos en los siguientes grafos ?

▶  $V_G = \{a, b, c, d\}$

$$E_G = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}, \{b, d\}\}$$

▶  $V_H = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

$$E_H =$$

$$\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, a\}, \{b, g\}, \\ \{g, c\}, \{c, f\}, \{f, d\}\}$$

▶  $V_F = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

$$E_F =$$

$$\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{f, a\}, \{a, g\}, \{b, g\}, \\ \{c, g\}, \{d, g\}, \{e, g\}, \{f, g\}\}$$

**R//:** Solo los grafos  $G$  y  $H$ . Pues solo tienen 2 vértices de grado impar.

## Circuitos de Euler (7)

**Ejercicio:** Es posible adaptar el algoritmo para construcción de circuitos eulerianos, para computar caminos eulerianos ?

**R//:** Sugerencia

1. Adicionar una arista entre los únicos vértices de grado impar.
2. Ejecutar el algoritmo para determinar el circuito euleriano ( **ya existente**).
3. Del circuito euleriano obtenido, eliminar la arista adicionada.
4. Reconstruir el camino iniciando en uno de los vértices de grado impar.

# Circuitos de Hamilton

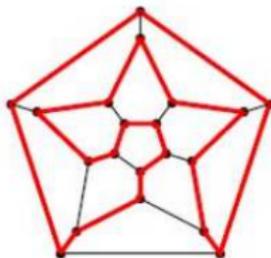


Figura: El juego de la vuelta al mundo de Hamilton

**Reseña histórica:** juego inventado por el matemático irlandés William Hamilton.

Dado un dodecaedro (poliedro de 12 caras, siendo cada una un pentágono regular) cuyos vértices se marcaron con 20 ciudades del mundo.

Es posible iniciar en una ciudad, visitar solo una vez cada una de las otras 19 ciudades, y regresar a la ciudad de origen ?

## Circuitos de Hamilton (2)

### circuito y camino de Hamilton

Un camino  $x_0, x_1, \dots, x_n$  en el grafo  $G = (V, E)$  es llamado un **camino Hamiltoniano** si  $V = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  y  $x_i \neq x_j$  para  $0 \leq i < j \leq n$ .

Un circuito  $x_0, x_1, \dots, x_n, x_0$  (con  $n \geq 1$ ) en un grafo  $G = (V, E)$  es llamado un **circuito Hamiltoniano** si  $x_0, x_1, \dots, x_n$  es un **camino Hamiltoniano**.

**Ejercicio:** Cuales de los siguientes grafos  $G, H, F$  tienen circuitos o caminos Hamiltonianos ?

- ▶  $V_G = \{a, b, c, d, e\}$   
 $E_G = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, a\}, \{a, c\}, \{b, e\}\}$
- ▶  $V_H = \{a, b, c, d\}$   $E_H = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}\}$
- ▶  $V_F = \{a, b, c, d, e, f, g\}$   
 $E_F = \{\{a, b\}, \{b, g\}, \{g, e\}, \{e, f\}, \{e, c\}, \{c, d\}, \{b, c\}\}$

## Circuitos de Hamilton (3)

- ▶ No se conocen **condiciones necesarias** y **suficientes** para la existencia de circuitos hamiltonianos.
- ▶ Si se conocen **teoremas** que dan **condiciones suficientes** para la existencia de circuitos hamiltonianos.
- ▶ **Hay** propiedades para demostrar que un grafo no contiene un circuito hamiltoniano (ej: grafo con vértice de grado 1).
- ▶ Un circuito hamiltoniano no puede contener un circuito mas pequeño dentro de él.
- ▶ Ideas:
  - ▶ Ambas aristas de un vértice de grado 2 tienen que formar parte del circuito hamiltoniano .
  - ▶ Al pasar por un vértice pueden descartarse todas las aristas incidentes con el que no sean las usadas en el circuito.

## Circuitos de Hamilton (4)

Algunas condiciones suficientes para la existencia de circuitos hamiltonianos son:

### Teorema de DIRAC

(Gabriel A. Dirac en 1952)

Sea  $G$  un **grafo simple** con  $n$  vértices con  $n \geq 3$  tal que todos los vertices de  $G$  tienen grado mayor o igual que  $n/2$ .  
Entonces,  $G$  contiene un circuito hamiltoniano.

### Teorema de ORE

(Oystein Ore en 1960)

Sea  $G$  un **grafo simple** con  $n$  vértices para  $n \geq 3$  tal que  $deg(u) + deg(v) \geq n$  para cada par de vértices no adyacentes  $u$  y  $v$  de  $G$ . Entonces,  $G$  contiene un circuito hamiltoniano.

## Circuitos de Hamilton (5)

**Ejercicio:** Determinar si los siguientes grafos contienen circuitos hamiltonianos

- ▶  $K_3$  (grafo completo de 3 vértices)
- ▶  $K_5$
- ▶  $K_n$
- ▶  $Q_2$  (2-cubo)
- ▶  $Q_3$
- ▶  $W_3$  (rueda de 3 vértices)
- ▶  $K_5$