Contenido

Grafos Planos

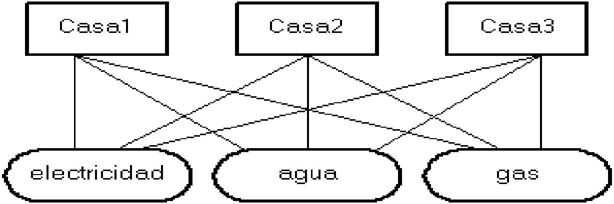

Figura: Tres casas y sus conexiones de agua, electricidad y gas

Problema: Es posible conectar las casas con las tomas de electricidad, agua y gas, sin que se crucen las conexiones ?

Grafos Planos (2)

Dado un grafo, es posible una representación de este en el plano, sin aristas que se crucen ?

Grafo plano

Un grafo es plano si puede ser dibujado en el plano sin ninguna arista que se cruce (sobreponga).
A ese dibujo se le llama representación planar del grafo.

Contenido

Grafos Planos (3)

Ejercicio: Determinar cuales de los siguientes grafos son planos ?

- K_4 (Grafo completo)
- K_5
- Q_3 (Cubo)
- $K_{3,3}$ (grafo bipartito completo)

Contenido

Formula de Euler

Regiones de un grafo plano

Una representación plana de un grafo divide el plano en regiones, entre ellas una región no acotada.

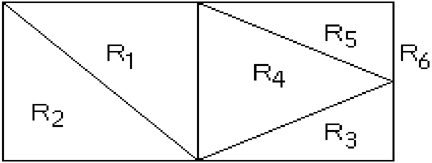

Figura: Ejemplo de la representación plana de un grafo

Formula de Euler (2)

Teorema 1

Sea G un grafo simple conexo con e aristas y v vértices. Sea r el número de regiones de una representación plana de G. Entonces:

$$r = e - v + 2$$

Demostración: Por inducción.

La formula de Euler puede ser usada para establecer algunas desigualdades (corolarios) que deben ser satisfechas por los grafos planos (funcionan en el mismo sentido de los invariantes).
Es decir, si no se cumplen no es posible una representación planar, pero si se cumple no se garantiza que el grafo es plano.

Formula de Euler (3)

Ejercicio2: Suponga que un grafo simple conexo plano tiene 20 vértices, cada uno de grado 3.
Cuantas regiones tendra la representación planar del mismo?

Grado de una región

El grado de una región denotado como deg(R) es definido como el número de aristas que hay en el borde de la región (cuando es dibujada).
Cuando una arista ocurre 2 veces en el borde (se pasa 2 veces por encima de la arista cuando se dibuja el borde), esa arista contribuye en 2 al grado.

Formula de Euler (4)

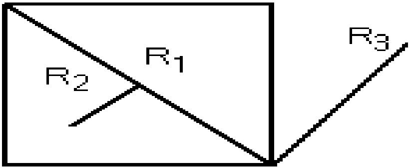

Figura: Ejemplo grafo para el computo de los grados de las regiones

Ejemplo: Los grados de las regiones del grafo son:
$deg(R_1) = 3$
$deg(R_2) = 6$
$deg(R_3) = 6$

Formula de Euler (5)

Corolario 1

Si G es un grafo simple conexo plano con e aristas y v vértices, donde $v \geq 3$, entonces

$$e \leq 3v - 6$$

Demostración:

Dado que para cada región $deg(R) \geq 3$, se sigue que:
$2e = \sum_R deg(R) \geq 3r$ (cada arista contribuye en 2 al grado)
$(2/3)e \geq r$.
$(2/3)e \geq e - v + 2$ (usando formula de Euler) Es decir:

$$e/3 \leq v - 2 \Longrightarrow e \leq 3v - 6$$

Ejercicio3: Es entonces K_5 un grafo conexo plano ? R//: No.

Formula de Euler (6)

Corolario 2

Si G es un grafo simple conexo plano, entonces G tiene un vértice de grado menor o igual que cinco.

Corolario 3

Si G es un grafo simple conexo plano que no contiene circuitos de longitud 3 con e aristas y v vértices, entonces

$$e \leq 2v - 4$$

. Demostración:
Similar a la del corolario1 (usando $deg(R) \geq 4$)

Ejercicio4: Es entonces $K_{3,3}$ un grafo conexo plano ? R//: No.

Contenido

Teorema de Kuratowski

Subdivisión elemental

Consiste en remover de un grafo una arista $\{u, v\}$ y adicionar un nuevo vértice w junto con las aristas $\{u, w\}$ y $\{w, v\}$.

Grafos homeomorficos

Los grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son llamados homeomorfos si ellos pueden ser obtenidos desde el mismo grafo por una secuencia de subdivisiones elementales.

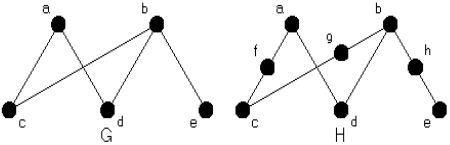

Figura: Grafos homeomorfos

Teorema de Kuratowski (2)

Creado por el matemático polaco Kazimierz Kuratowski en 1930 .

Teorema de Kuratowski

Un grafo es plano si y solo no contiene ningún subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$ o K_5.

Nota: La demostración del hecho que: Todo grafo que no contiene un subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$ o K_5 es plano, es complicada.

Teorema de Kuratowski (3)

Ejemplo: El grafo de Petersen no es plano, porque contiene un subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$.

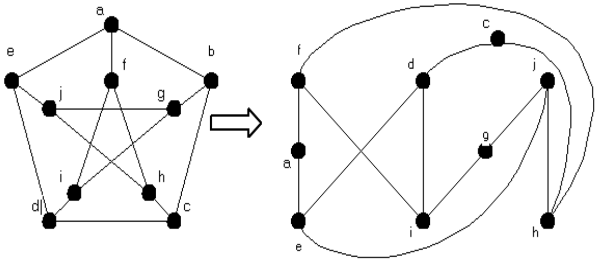

Figura: Grafo de Petersen