Contenido

Contenido

Arbol

Es un grafo no dirigido, conexo y sin ciclos.

Ejercicio: Cuales de los siguientes grafos F, G, H, I son árboles ?

- $V_F = \{a, b, c, d, e, f\}$
  $E_F = \{\{a, c\}, \{b, c\}, \{d, c\}, \{c, f\}, \{e, f\}\}$
- $VG = \{a, b, c, d, e, f\}$
  $E_G = \{\{a, c\}, \{a, f\}, \{b, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}\}$
- $VH = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
  $E_H = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, c\}, \{b, e\}, \{c, f\}, \{d, e\}\}$
- $V_I = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ $E_I = \{\{a, f\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, e\}\}$

Arboles (2)

Teorema 1
Un grafo no dirigido es un árbol si y solo si hay un único camino entre cada pareja de vértices.

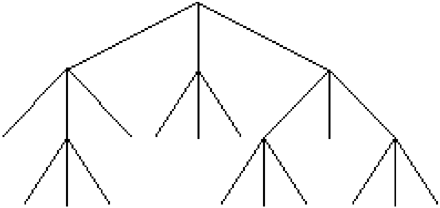

Figura: Ejemplo de un arbol

Contenido

Arboles con raíz

Un árbol con raíz es un árbol en el que uno de sus vértices ha sido designado como la raíz y todas las aristas están orientadas de modo que se alejan de la raíz.

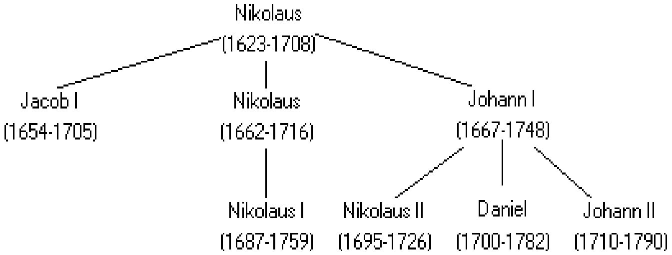

Figura: Ejemplo de un arbol con raíz

Arboles con raíz (2)

La terminología de los árboles tiene origenes botánicos y genealógicos.
Supongamos que T es un árbol con raíz:

- El padre de v es el único vértice u talque hay una arista dirigida de u a v.
- En el caso anterior, se dice que v es el hijo de u.
- Los vértices con el mismo padre son llamados hermanos.
- Los antecesores de cualquier vértice diferente a la raíz son los vértices en el camino desde la raíz hasta él (incluyendo la raíz, pero excluyéndolo a el).
- Los descendientes de un vértice son todos aquellos que tienen a v como su antecesor.

Arboles con raíz (3)

Continuación:

- Un vértice se llama hoja si no tiene hijos.
- Los vértices que tienen hijos son llamados vértices internos.

Nivel de un vértice

El nivel de un vértice es la longitud del único camino desde la raíz hasta el. El nivel de la raíz es 0.

Altura de un árbol

La altura (h) de un árbol es la longitud del camino más largo desde la raíz a cualquier vértice.

Arbol equilibrado

Un árbol de altura (h) está equilibrado o balanceado si todas sus hojas están en los niveles h o $h - 1$.

Arboles con raíz (4)

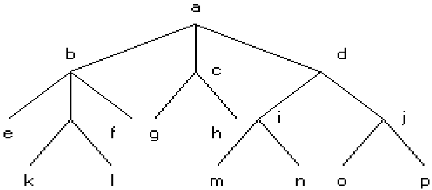

Figura: Ejemplo de un árbol

Ejemplo: Para el árbol equilibrado de altura $h = 3$ tenemos:

- j es el padre de p (p es uno de los hijos de j).
- los antecesores de n son $\{i, d, a\}$.
- los descendientes de d son $\{i, j, m, n, o, p\}$.
- los vértices $\{e, k, l, f, g, h, m, n, o, p\}$ son hojas.
- los vértices $\{a, b, c, d, i, j\}$ son vértices internos.

Contenido

Arboles completos

Árbol m-ario

Un árbol con raíz es llamado árbol m-ario si todos los vértices internos tienes, máximo m hijos.

Un árbol m-ario con $m = 2$ se llama árbol binario

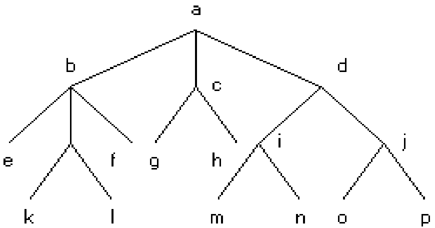

Figura: Ejemplo de un árbol m-ario

Arboles completos (2)

Un árbol se llama árbol m-ario completo si todo vértice interno tiene exactamente *m* hijos.

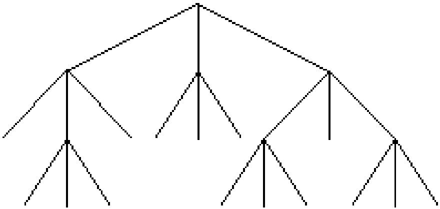

Figura: Ejemplo de un árbol m-ario completo

Contenido

Propiedades de los árboles

Teorema 2

Un árbol con n vértices tiene $n - 1$ aristas.
Demostración: Por Inducción (desde $n = 1$).

Teorema 3

Un árbol m-ario completo con i vértices internos contiene $n = m * i + 1$ vértices.
Demostración: Puesto que el número de nodos internos es i y cada uno tiene m hijos diferentes de la raíz.

Propiedades de los árboles (2)

Teorema 4

Un árbol m-ario completo con:

- n vértices tiene $i = (n-1)/m$ vértices internos y l=((m-1)n+1)/m hojas.
- i vértices internos tiene n=mi+1 vértices y l=(m-1)i+1 hojas.
- l hojas tiene $n = (ml-1)/(m-1)$ vértices e i=(l-1)/(m-1) vértices internos.

Demostración: Usando teorema 3 e igualdad $n = l + i$ (cada vertice es interno o una hoja).

Propiedades de los árboles (3)

Teorema 5

Un árbol m-ario de altura h tiene máximo m^h hojas.
Demostración: Por inducción sobre la altura (desde $h = 1$)

Corolario 1

Si un árbol m-ario de altura h tiene l hojas, entonces $h \geq \lceil log_m\ l \rceil$.
Si el árbol m-ario es completo y equilibrado entonces $h = \lceil log_m\ l \rceil$.
Demostración: Usando Teorema 5 especificamente ($l \leq m^h$) y aplicar logaritmo para despejar.