

Teoria de conjuntos

Concepto: un conjunto es una lista de elementos no repetidos y no ordenados

- Conjunto de naturales $\mathbb{N}$; representado por los numeros $N = \{0, 1, 2, 3, 4...\}$
- Conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$; representado por los numeros $Z = \{..-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
- Conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$; representado por $Q = \{p/q; p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\}$
- Conjunto de los reales $\mathbb{R}$; representa a todos los números exceptuando los imaginarios

subconjunto: $A \subseteq B$ se presenta cuando los elementos de un conjunto A estan presentes en un conjunto B .

ej: $A = \{4, 2, 1\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ entonces se dice que A es subconjunto de B se denota por $A \subseteq B$

Operaciones sobre conjuntos

operación	Descripción
Unión	$A \cup B = \{a \in A \vee b \in B\}$
Intercepción	$A \cap B = \{a \in A \wedge b \in B\}$
Diferencia	$A - B = \{a \in A \wedge b \notin B\}$
Complemento	$\bar{A} = \{x \in U \wedge x \notin A\}$

Conjunto potencia: es el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto S ; se denota por $P(S)$; ejemplo sea

$S = \{1, 2, 4\}$ entonces $P(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}\}$; la cardinalidad o norma de un conjunto $P(S)$ esta dada por $|P(S)| = 2^{|S|}$

Producto carteciano: es el conjunto de elementos ordenados de un conjunto A y B se denota por $A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$

Monotonicidad en funciones

- $f(n)$ es monotonica creciente si $m \leq n$ entonces $f(m) \leq f(n)$
- $f(n)$ es monotonica decreciente si $m \leq n$ entonces $f(m) \geq f(n)$
- $f(n)$ es estrictamente creciente si $m < n$ entonces $f(m) < f(n)$
- $f(n)$ es estrictamente decreciente si $m > n$ entonces $f(m) > f(n)$

Logica de primer orden

- $\neg(\neg P) \equiv P$
- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

- $\neg(p \implies q) \equiv p \wedge \neg q$
- $\neg(p \iff q) \equiv p \iff \neg q$
- $p \iff q \equiv p \implies q \wedge q \implies p$

Negación de cuantificadores

- $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
- $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$

sumatorias

- La suma de los n primeros terminos naturales $1, 2, 3, 4, 5, \dots, n$ entonces $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$
- La suma de los n primeros numeros de un serie aritmetica $a, a+b, a+2b, a+3b, \dots, a+(n-1)b$ entonces $\sum_{i=0}^{n-1} (a+bi) = \sum_{i=0}^{n-1} a + b \sum_{i=0}^{n-1} i = an + \frac{b}{2}n(n-1)$
- La suma de los n primeros numeros de una serie geometrica $1, r, r^2, r^3, \dots, r^{n-1}$ entonces $\sum_{i=0}^{n-1} r^i = \frac{r^n - 1}{r - 1}$
- Un caso aplicado en analisis de algoritmo $\sum_{i=0}^{n-1} r^i = 2^n - 1$
- si $|r| < 1$ la suma de los infinitos terminos de una progresion geometrica $\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$
- si $|r| < 1$ entonces $\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot r^i = \frac{r}{(1-r)^2}$

Desigualdades

- Si $A \leq B$ y $B \leq C$ entonces $A \leq C$
- Si $A \leq B$ y $C \geq 0$ entonces $CA \leq CB$
- Si $A \leq B$ y $C \leq 0$ entonces $CA \geq CB$
- Si $A \leq B$ y $C \leq D$ entonces $A + C \leq B + D$
- $e^x \geq (x+1)$

Funciones especiales

Funcion piso: asigna al número real x el entero mas grande que es menor o igual a x ; se denota por $\lfloor x \rfloor$

- $\lfloor x \rfloor = n$ si y solo si, $n \leq x < n + 1$
- $\lfloor x \rfloor = n$ si y solo si, $x - 1 < n \leq x$

Funcion techo: asigna al número real x el entero mas pequeño que es mas grande o igual a x ; se denota por $\lceil x \rceil$

- $\lceil x \rceil = n$ si y solo si, $n - 1 < x \leq n$
- $\lceil x \rceil = n$ si y solo si, $x \leq n < x + 1$

Exponenciales

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^{-1} = \frac{1}{a}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(a^m)^n = (a^n)^m$
- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Logaritmos

- $\lg n = \lg_2 n$
- $\ln n = \lg_e n$
- $\lg^k n = (\lg n)^k$
- $b^{\lg_b a} = a$
- $\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$
- $\log_c(a^n) = n \log_c a$
- $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$
- $\log_c(\frac{1}{a}) = -\log_c a$
- $\log_c a = \frac{1}{\log_a c}$
- $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

Limites y continuidad

continuidad: la función f definida en un conjunto $[a, b]$ de números reales que tiene límite L en x_0 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

Dado cualquier número real $\epsilon > 0$ debería existir un número real $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - L| < \epsilon; \quad x \in [a, b] \quad y \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

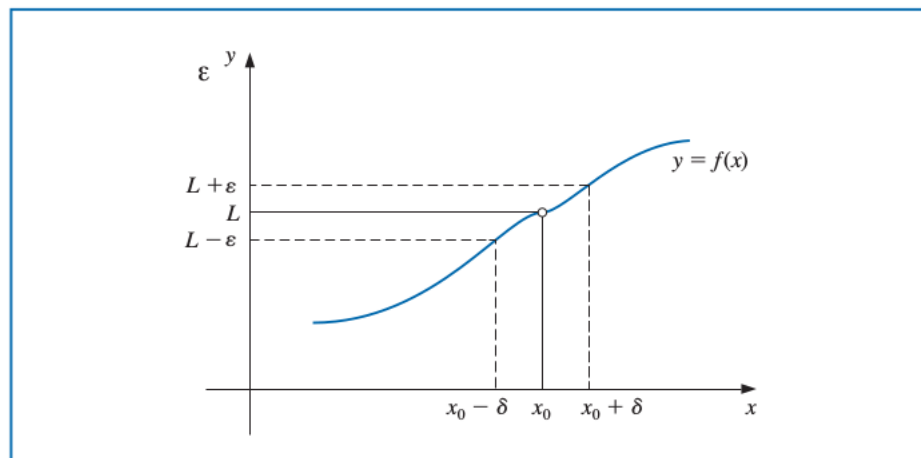


Figure 1: Representación de continuidad

Definición: sea f una función definida en un conjunto $[a, b]$ y $x_0 \in [a, b]$ entonces f es continua en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

La función es continua en el conjunto $[a, b]$ si es continua en cada uno de los elementos entre $[a, b]$



Figure 2: funciones continuas y discontinuas. **El caso 1** no existe un valor para $f(a)$; **el segundo caso** el límite por la izquierda y la derecha no son iguales.; **en el caso 3** $f(a)$, no es igual al límite

Diferenciación

La f es un función definida en un intervalo abierto que contine x_0 ; la función f es diferenciable en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

la derivada de f en x_0 es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en f en el punto $(x_0, f(x_0))$

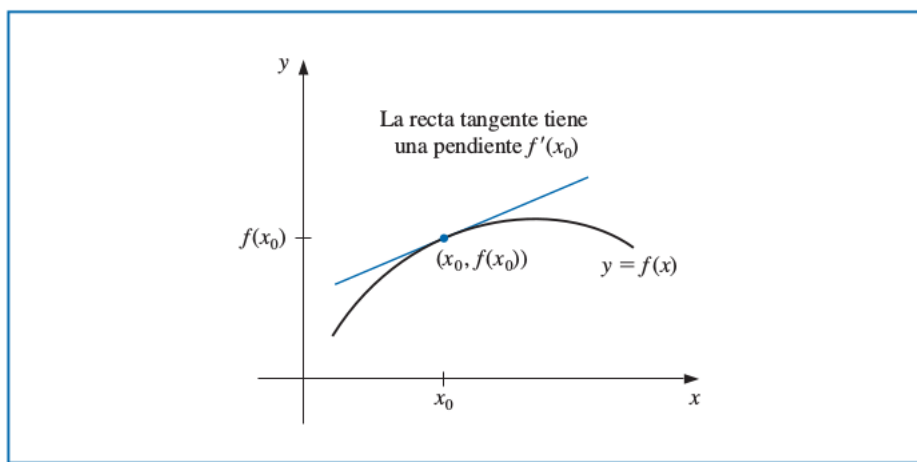


Figure 3: Definición de derivación a partir del concepto de límite

Teorema del valor medio(Lagrange)

El teorema enuncia que si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b) entonces existe un punto c en (a, b) tal que la recta tangente en el punto c es paralela a la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, esto es

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

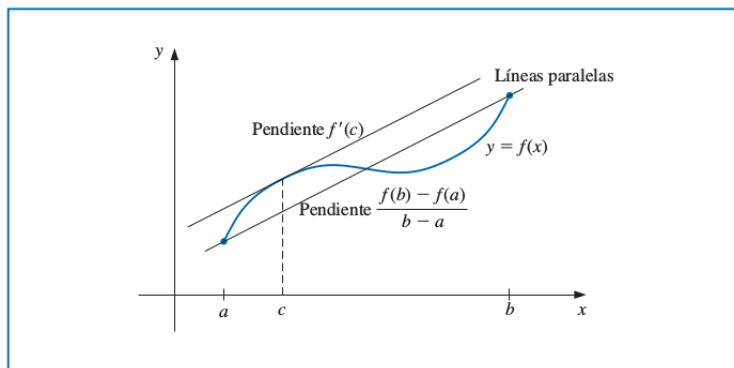


Figure 4: Teorema de valor medio; las secante en paralela a la tangente en el punto c

Integrales y suma reimann

La integral de reimann de la funcion f en el intervalo $[a, b]$ se puede calcular

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

donde $x_i = a + i(\frac{b-a}{n})$

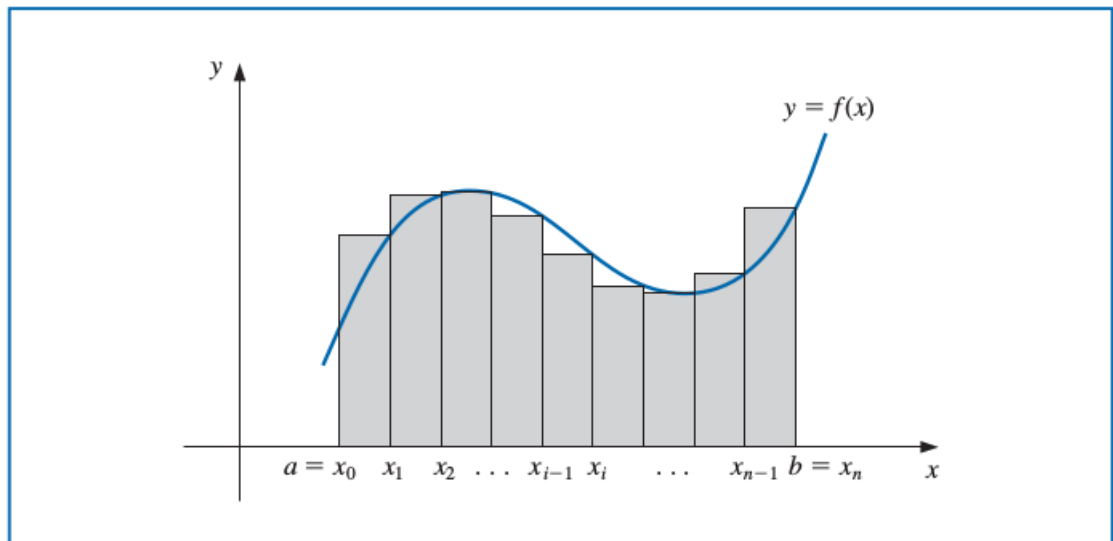


Figure 5: Sumatoria de Riemann