

# Aproximaciones y Errores de Redondeo

Hernán Gómez

Universidad del Pacifico  
(Programa Ingeniería de Sistema)

Abril, 2021



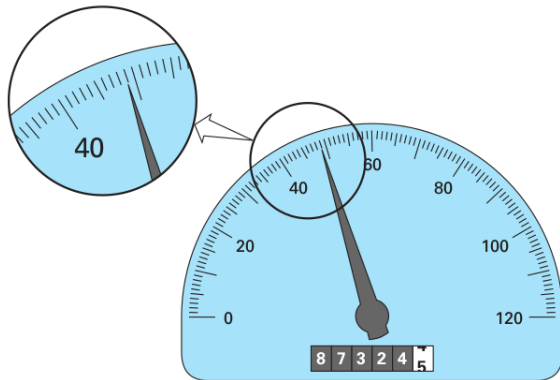
# Idea de las aproximaciones y Errores de redondeo

- El concepto de error es importante entenderlo antes de utilizar en forma efectiva los métodos numéricos; dado que los métodos numéricos son aproximaciones a valores que analíticamente no podemos obtener.
- En muchos problemas de aplicación en ingeniería no es posible obtenerse la solución analítica exacta; por consiguiente, es complejo calcular con exactitud los errores de los métodos numéricos.
- Para poder examinar estos métodos numéricos en cuanto a su precisión o incertidumbre de alguna manera debemos usar aproximaciones o estimaciones de los errores.



## Cifras Significativas

- La cifras significativas son los digitos de un numero que se pueden usar con confianza para realizar un calculo.



**Figura:** El velocímetro muestra la velocidad que esta comprendida entre 48 y 49 km/h. Pero con dicho instrumento no podríamos determinar si es 48.5 o 48.8 para ser más precisos.

# Cifras Significativas

El concepto de cifra significativa tiene 2 consideraciones:

- Para garantizar la confiabilidad de un resultado; uno de los criterios es hacerlo en términos de cifras significativas; así se podría hablar de que un número o resultado es aceptable si tiene sus 4 cifras significativas.  
Ejemplo: **3.467**. **345.8**
- Los cálculos computacionales no pueden conservar valores totales y toca redondearlos a las cifras más significativas tal es el caso de números con dígitos infinitos (irracionalidad) EJ:  $\pi$ ,  $e$ ,  $\sqrt{7}$  entre otros. esta pérdida de precisión producto del redondeo que es indispensable para poderlo usar en los dispositivos digitales provoca un error de redondeo que se debe tener en cuenta.



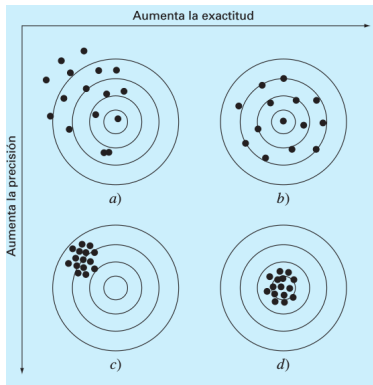
# Exactitud y Precisión

Los errores en cálculos y medidas se pueden caracterizar con respecto a su **exactitud y su precisión**:

- La exactitud se refiere a qué tan cercano está el valor calculado o medido del valor verdadero. **Ejemplo se conoce que el valor de un costo de mercancía expresado en termino de minimo global es 3.5 millones pero el arrojado por metodo matematico arroja 3.2 millones.**
- La precisión indica el grado de concordancia entre los resultados obtenidos al aplicar el mismo proceso experimental repetidas veces. **Ejemplo se va tomar el tiempo de funcionamiento de una maquina: 2.25 s, 2.22 s y 2.28 s**



# Exactitud y Precisión



**Figura:** En la **figura (a)**; se presenta que los puntos están muy lejos del centro y a la vez entre ellos están dispersos (**baja precisión y exactitud**). En la **figura (b)**; se presenta que los puntos están distribuidos cerca del centro que aumenta la exactitud pero los puntos no están muy cercanos (**aumento exactitud baja precisión**). En la **figura (c)**; hay una alta precisión (concentración) y una baja exactitud con relación al centro. En la **figura (d)** hay alta precisión y exactitud.



# Errores Verdaderos

Los errores numéricos surgen del uso de aproximaciones para representar operaciones y cantidades matemáticas exactas: estos se presentan ya sea por truncamiento o por el uso de cierta longitud de cifras significativas:

- El error numérico esta dado por la relación, donde  $E_t$  , representa el error verdadero

$$E_t = |\text{valor verdadero} - \text{valor aproximado}|$$



# Errores relativos verdaderos

- El error relativo esta dado por la fraccion que representa el error con respecto al valor verdadero.

$$E_{relativo} = \left| \frac{E_t}{valor\ verdadero} \right|$$

- El porcentaje del error relativo esta dado por el porcentaje de la fraccion que representa el error con respecto al valor verdadero.

$$\%E_{relativo} = \left| \frac{E_t}{valor\ verdadero} \right| * 100$$



## Ejemplo 1: Midiendo el Puente

- Escenario se conoce que un puente tiene una longitud de 10000 cm es decir 100m; se emplear un metodo de medición y arroja 9999; calcule el error.

$$E_t = |\text{valor verdadero} - \text{valor aproximado}| = 10000 - 9999 = 1 \text{ cm}$$

$$\%E_{\text{relativo}} = \left| \frac{E_t}{\text{valor verdadero}} \right| * 100 = \frac{1}{10000} * 100 = 0,01 \%$$



## Ejemplo 2: Midiendo Clavos Mesa

- Escenario se conoce que la distancia entre clavos de una mesa es de 10 cm; con instrumento de medición se toma y se anota 9 cm. calcule el error

$$E_t = |\text{valor verdadero} - \text{valor aproximado}| = 10 - 9 = 1 \text{ cm}$$

$$\%E_{\text{relativo}} = \left| \frac{E_t}{\text{valor verdadero}} \right| * 100 = \frac{1}{10} * 100 = 10 \%$$



# Análisis de Situaciones

- Según las situaciones presentadas (ejemplo1-puente y ejemplo2-calvos mesa) se observa que el error verdadero es **1cm** las medidas **no son comparables** puesto que el puente es un error menor comparado a la longitud del puente.
- Se puede concluir que el error verdadero **no es una buena alternativa** para comparar y es preferible el uso de error relativo o error relativo porcentual.
- Dado los dos errores relativos porcentuales de los ejemplos se puede determinar que hay un **menor error** en el puente que en la situación de los clavos



# Errores Aproximados

- El termino error verdadero solo se puede calcular si se conoce el valor a priori o si es generado por una solución analítica.
- La mayoría de metodos numericos resuelven problemas que no se pueden llevar a cabo por metodos analiticos, por consiguiente no se puede contar con un **valor verdadero** y a su vez de **un error verdadero**
- Se emplea en metodos numericos el termino de **valor aproximado** y **error aproximado** dado que no se puede conocer el valor real sino una aproximación.



# Errores Aproximados

- Porcentaje error relativo aproximado:

$$\%E_a = \left| \frac{\text{error aproximado}}{\text{valor aproximado}} \right| * 100$$

- siempre se trabaja el error aproximado como valor absoluta sin importar el signo, si no mas bien la diferencia existente del error:  
 $|E_a| < e_s$  ; donde  $e_s$ , es el valor que estamos dispuestos a aceptar



# Estimación Errores Método Iterativo

- Los metodos numericos usan los metodos iterativos. En estos métodos se hace una aproximación considerando la aproximación anterior, donde el proceso se efectúa varias veces, o de forma iterativa, para calcular en forma sucesiva generando mejores aproximaciones.

$$\%E_a = \left| \frac{\text{aproximacion actual} - \text{aproximacion anterior}}{\text{aproximacion actual}} \right| * 100$$



# Método Iterativo: series de Maclaurin

- En matemáticas existen números irracionales como  $e$  (euler), que por ser racional en un número de decimales infinito. La función  $f(x) = e^x$ ; solo se puede obtener por aproximación empleando métodos iterativos.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots + \frac{x^n}{n!}$$



# Método Iterativo: Series de Maclaurin

Suponga que se va a calcular  $e^{0,5}$ , donde  $x = 0,5$ ; las 3 primeras iteraciones:

- Iteración 1:  $e^{0,5} \approx 1$
- Iteración 2:  $e^{0,5} \approx 1 + 0,5$
- Iteración 3:  $e^{0,5} \approx 1 + 0,5 + \frac{(0,5)^2}{2!}$

suponga que el valor verdadero (esto es una aproximación) de  $e^{0,5} \approx 1,648721$  entonces el porcentaje de error verdadero si empleamos el valor de la segunda iteración es  $\%E_t = \left| \frac{1,648721 - 1,5}{1,648721} \right| * 100 = 9,02 \%$

Para el caso de cálculo del porcentaje aproximado se emplean las aproximaciones anteriores con la actual para poder tener una diferencia comparativa  $\%E_a = \left| \frac{1,5 - 1}{1,5} \right| * 100 = 33,3 \%$



## Método Iterativo: Series de Maclaurin

iteraciones que garantizan un error aproximado menor o igual a epsilon o valor dispuesto aceptar; para este caso seria:  $\%E_a \leq 0,05 \%$  a continuación se presentan las iteraciones necesaria para satisfacer este criterio.

| Términos | Resultado   | $\varepsilon_f$ (%) | $\varepsilon_a$ (%) |
|----------|-------------|---------------------|---------------------|
| 1        | 1           | 39.3                |                     |
| 2        | 1.5         | 9.02                | 33.3                |
| 3        | 1.625       | 1.44                | 7.69                |
| 4        | 1.645833333 | 0.175               | 1.27                |
| 5        | 1.648437500 | 0.0172              | 0.158               |
| 6        | 1.648697917 | 0.00142             | 0.0158              |

**Cuadro:** Cuadro 6 iteraciones empleando la serie Maclaurin

