

Descomposición Matrices(LU)

Hernán Gómez

Universidad del Pacifico
(Programa Ingeniería de Sistema)

Abril, 2021



Contenido

1 Descomposicion LU

Descomposicion LU

- Sea una matriz cuadrada $A_{n \times n}$, la composicion consiste en descomponer A en dos matrices L y U

$$A = L.U$$



Versiones de descomposición

- Existen dos versiones de descomposición:

- 1 Metodo Crout
- 2 Metodo Doolittle



Versión Crout

- En esta version la matriz L es triangular inferior y la matriz U es triangular superior con 1(s) en su diagonal

$$L = \begin{bmatrix} L_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ L_{2,1} & L_{2,2} & 0 & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & L_{3,3} & 0 \\ L_{4,1} & L_{4,2} & L_{4,3} & L_{4,4} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & U_{1,2} & U_{1,3} & U_{1,4} \\ 0 & 1 & U_{2,3} & U_{2,4} \\ 0 & 0 & 1 & U_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Versión Doolittle

- En esta version la matriz U es triangular inferior y la matriz L es triangular superior con 1(s) en su diagonal

$$U = \begin{bmatrix} U_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ U_{2,1} & U_{2,2} & 0 & 0 \\ U_{3,1} & U_{3,2} & U_{3,3} & 0 \\ U_{4,1} & U_{4,2} & U_{4,3} & U_{4,4} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & L_{1,2} & L_{1,3} & L_{1,4} \\ 0 & 1 & L_{2,3} & L_{2,4} \\ 0 & 0 & 1 & L_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Ecuacion version Crout

$$A = L.U$$

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ L_{2,1} & L_{2,2} & 0 & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & L_{3,3} & 0 \\ L_{4,1} & L_{4,2} & L_{4,3} & L_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U_{1,2} & U_{1,3} & U_{1,4} \\ 0 & 1 & U_{2,3} & U_{2,4} \\ 0 & 0 & 1 & U_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Proceso Generación Valores L y U

Para la obtención se debe seguir el siguiente proceso:

- Conmutar el calculo de una columna $L_{[1:n],i}$ con el calculo de una fila $U_{i,[1:n]}$ y posteriormente $L_{[1:n],i+1}$ $U_{i+1,[1:n]}$



Proceso Generación Valores L y U

Generación columna #1 en L

$A_{1,1} = L_{1,1} * 1 + 0 * 0 + 0 * 0 + 0 * 0$ entonces se tendria que $L_{1,1} = A_{1,1}$

$A_{2,1} = L_{2,1} * 1 + L_{2,2} * 0 + 0 * 0 + 0 * 0$ entonces se tendria que $L_{2,1} = A_{2,1}$

De manera generalizada se podria decir que $L_{i,1} = A_{i,1}$ para $i = 1....n$



Proceso Generación Valores L y U

Alternancia: Generación fila #1 en U

$A_{1,2} = L_{1,1} * U_{1,2} + 0 * 1 + 0 * 0 + 0 * 0$ entonces se tendria que $U_{1,2} = \frac{A_{1,2}}{L_{1,1}}$

$A_{1,3} = L_{1,1} * U_{1,3} + 0 * U_{2,3} + 0 * 1 + 0 * 0$ entonces se tendria que

$$U_{1,3} = \frac{A_{1,3}}{L_{1,1}}$$

De manera generalizada se podria decir que $U_{1,i} = \frac{A_{1,i}}{L_{1,1}}$ para $i = 1....n$.



Generalización de la descomposición L y U

- Matriz L:

$$L_{i,j} = A_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} (L_{i,k} \cdot U_{k,j}); \text{ para } j \leq i; i = 1, 2, \dots, n$$

- Matriz U:

$$U_{i,j} = \frac{A_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} (L_{i,k} \cdot U_{k,j})}{L_{i,i}}; \text{ para } i \leq j; j = 2, \dots, n$$



Solución de ecuaciones por descomposición L.U

Dado que se tuvieron que hacer operaciones en A para transformarla en U, al igual que en B para obtener el valor del vector X, se debe primero hallar el vector B'

- Cálculo vector B' :

$$b'_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} (L_{i,k} \cdot b'_k)}{L_{i,i}}; \text{ para } i = 1, 2, \dots, n$$

- Cálculo vector X:

$$X_j = b'_j - \sum_{k=j+1}^n (U_{j,k} \cdot b'_k); \text{ para } j = (n-1) \dots, 1$$

