

Metodos de Jacobi y Gauss-Seidel

Hernán Gómez

Universidad del Pacifico
(Programa Ingeniería de Sistema)

Abril, 2021



Contenido

1 Método de Jacobi

2 Método de Gauss - Seidel



Método de Jacobi

- Sea una matriz cuadrada $A_{n \times n}$, se sustituye en dos matrices D y R

$$A = D + R$$



Matrices D y R

Las matrices D y R poseen ciertas características:

- D es una matriz cuyos elementos son ceros con excepción a la diagonal principal que corresponde a la diagonal principal de A .
- R tiene ceros en la diagonal principal y el resto son elementos de A



Matrices D y R

$$A = D + R$$

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{4,4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & 0 & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & 0 & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & 0 \end{bmatrix}$$



Ecuacion iterativa de Jacobi

- Sea $AX = B$, si $A = D + R$ entonces $(D + R)X = B$ aplicando propiedad distributiva $DX + RX = B$ organizando el lado izquierdo seria $DX = B - RX$ multiplicando ambos lados por la inversa de $D(D^{-1})$ se tiene que $D^{-1}DX = D^{-1}(B - RX)$ simplificado quedaria $X = D^{-1}(B - RX)$ que detemina una ecuacion de recurrencia que se puede expresar como:

$$X^{(k+1)} = D^{-1}(B - RX^{(k)})$$

Para todo $k=1, 2..n$ donde k representa una iteración.



Iteratividad de Jacobi

La primera iteración del vector $X^0 = \bar{0}$ será la primera aproximación que se sustituirá consecutivamente hasta que la diferencia entre los dos vectores solución sea menor a una tolerancia establecida.

dada la configuración de la matriz de D , su inversa (D^{-1}) su inversa se obtiene de forma simple, puesto que solo se obtiene los valores para la diagonal.

$$D = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{4,4} \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/A_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/A_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/A_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/A_{4,4} \end{bmatrix}$$



Proceso de iteraciones Jacobi

iteracion $(k + 1)$:

- $$X_1^{(k+1)} = \frac{B_1 - [A_{1,2}X_2^k + A_{1,3}X_3^k + \dots A_{1,n}X_n^k]}{A_{1,1}}$$
- $$X_n^{(k+1)} = \frac{B_n - [A_{n,1}X_1^k + A_{n,2}X_2^k + \dots A_{n,n-1}X_{n-1}^k]}{A_{n,n}}$$



Proceso de iteraciones de Jacobi

El metodo de Jacobi propone que el primer vector aproximación sea $X^0 = \bar{0}$

El segundo vector aproximación sera:

$$X_i^1 = \frac{B_i}{A_{i,i}} \longrightarrow x^1 = \left\{ \begin{array}{c} \frac{B_1}{A_{1,1}} \\ \frac{B_2}{A_{2,2}} \\ \frac{B_3}{A_{3,3}} \\ \frac{B_4}{A_{4,4}} \end{array} \right\}$$

Para calcular el error de la iteracion se empleara:

$$D(X^k, X^{(k+1)}) = \sqrt{(X_1^{(k+1)} - X_1^k)^2 + (X_2^{(k+1)} - X_2^k)^2 + \dots + (X_n^{(k+1)} - X_n^k)^2}$$



Criterio de Convergencia Jacobi

Consiste en dos condiciones denominadas criterio de diagonal pasada:

- Condición necesaria: el elemento de la diagonal principal es el mayor en el valor absoluto que el resto de elementos en la misma fila(ecuacion):

$$|A_{i,i}| > |A_{i,j}|$$

- Condición suficiente: el elemento de la diagonal principal es mayor que la suma del resto de los elementos del misma fila(ecuacion):

$$|A_{i,i}| > \sum |A_{i,j}|$$

Antes de hacer el método hay que verificar que cumpla el criterio de la diagonal pesada; en caso de no cumplir se deben intercambiar las filas. Entre más pesada sea al diagonal mejor convergencia tendra.



Contenido

1 Método de Jacobi

2 Método de Gauss - Seidel



Método de Gauss-Seidel

- Es un método que mejora la velocidad del método de Jacobi.
- El criterio de convergencia, la medición de la tolerancia y la ecuación de recurrencia son los mismos de Jacobi, con la diferencia de la aproximación.



Metodo de Gauss-Seidel

El primer vector aproximación sea $X^0 = \bar{0}$

El segundo vector aproximación sera:

$$X_i^1 = \frac{B_i}{A_{i,i}} \longrightarrow x^1 = \left\{ \begin{array}{c} \frac{B_1}{A_{1,1}} \\ \frac{B_2}{A_{2,2}} \\ \frac{B_3}{A_{3,3}} \\ \frac{B_4}{A_{4,4}} \end{array} \right\}$$

La mejora es ir trabajando con los valores generados y no esperar que se complete el vector $X^{(k+1)}$:

- $X_1^{(k+1)} = \frac{B_1 - [A_{1,2}X_2^k + A_{1,3}X_3^k + \dots A_{1,n}X_n^k]}{A_{1,1}}$
- $X_2^{(k+1)} = \frac{B_2 - [A_{2,1}X_1^{(k+1)} + A_{2,3}X_3^k + \dots A_{2,n}X_n^k]}{A_{2,2}}$
- $X_3^{(k+1)} = \frac{B_3 - [A_{3,1}X_1^{(k+1)} + A_{3,2}X_2^{(k+1)} + \dots A_{3,n}X_n^k]}{A_{3,3}}$

