

(Polinomio de Lagrange)

Hernán Gómez

Universidad del Pacífico
(Programa Ingeniería de Sistema)

Abril, 2021



Paso no constante

- Cuando se tabula unos puntos, es decir se tienen unos puntos de manera que la variable independiente no tiene unos pasos regulares(constantes), el polinomio de Lagrange es una opción muy simple para obtener una función de los puntos.
- A pesar que los valores o pasos(incrementos) de la variable independiente no sea constante no limita el proceso de obtención de la función:

X	Y
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
x_4	y_4
x_5	y_5



Paso no constante

- Una de las ideas a tener en cuenta es: Si se tienen n puntos tabulados la función o el polinomio será de grado menor o igual a $(n - 1)$

X	Y
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
x_4	y_4

- Entonces dado un conjunto de 4 puntos un posible polinomio o función será:

$$y = f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$



Paso no constante

- Entonces dado un conjunto de 4 puntos un posible polinomio o función será:

Si se plantea la inspección para cada punto se obtendrá lo siguiente:

$$\text{Si } x = x_1 \implies y_1 = f(x_1) = Ax_1^3 + Bx_1^2 + Cx_1 + D$$

- Si $x = x_2 \implies y_2 = f(x_2) = Ax_2^3 + Bx_2^2 + Cx_2 + D$

- Si $x = x_3 \implies y_3 = f(x_3) = Ax_3^3 + Bx_3^2 + Cx_3 + D$

- Si $x = x_4 \implies y_4 = f(x_4) = Ax_4^3 + Bx_4^2 + Cx_4 + D$

De hecho se podría resolver el sistema de ecuaciones para encontrar A, B, C pero sería impráctico pues cuando crezcan los puntos habrá más ecuaciones y variable



Metodo Polinomio de Langrange

Si la tabla contiene n puntos, el polinomio será de grado $n - 1$ o menor. A partir de un tipo de diferencias denominadas diferencias divididas con lo cual se plantea una nueva formula:

$$y = A_1(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \dots (x - x_n) +$$

$$A_2(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) \dots (x - x_n) + \dots$$

$$A_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \dots (x - x_{n-1})$$

Cuadro: Ecuación 1



Metodo Polinomio de Langrange

Si se reemplaza el valor de $x = x_i$ desde $i = 1$ hasta n

$$y_1 = A_1(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \dots (x_1 - x_n)$$

$$y_2 = A_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \dots (x_2 - x_n)$$

$$y_n = A_n(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3)(x_n - x_4) \dots (x_n - x_{n-1})$$

De esta forma se puede deducir que:

$$y_i = A_i \prod_{j \neq i, j=1}^n (x_i - x_j)$$



Metodo Polinomio de Langrange

Si se despega A_i ejemplo:

$$A_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \dots (x_1 - x_n)}$$

$$A_2 = \frac{y_2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \dots (x_2 - x_n)}$$

$$A_n = \frac{y_n}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3)(x_n - x_4) \dots (x_n - x_{n-1})}$$

Cuadro: ecuacion 2. Despejes de A



Metodo Polinomio de Langrange

Sustituyendo la ecuación 2 en 1:

$$y = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \dots (x - x_n) * y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \dots (x_1 - x_n)} +$$
$$\frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) \dots (x - x_n) * y_2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \dots (x_2 - x_n)} +$$
$$\frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \dots (x - x_{n-1}) * y_n}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3)(x_n - x_4) \dots (x_n - x_{n-1})}$$

Cuadro: Ecuación 2. Despejes de A

De esta forma se puede definir que: $y = \sum_{i=1}^n \left[\prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right] y_i$



Ejemplo Polinomio de Langrange

Sean los siguientes puntos:

X	Y
0	2
1	3
4	18
6	38



Ejemplo Polinomio de Langrange

Sean los siguientes puntos:

$$\begin{aligned} y = & \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}y_1 + \\ & \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}y_2 + \\ & \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}y_3 + \\ & \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}y_4 \end{aligned}$$

Figura: Ecuaciones de para los 4 puntos



Ejemplo Polinomio de Langrange

Encontrar informacion para $x=2$:

$$\begin{aligned}y &= \frac{(2-1)(2-4)(2-6)}{(0-1)(0-4)(0-6)}(2) + \\&\quad \frac{(2-0)(2-4)(2-6)}{(1-0)(1-4)(1-6)}(3) + \\&\quad \frac{(2-0)(2-1)(2-6)}{(4-0)(4-1)(4-6)}(18) + \\&\quad \frac{(2-0)(2-1)(2-4)}{(6-0)(6-1)(6-4)}(38) \\y &= 6\end{aligned}$$

Figura: Solución de y en $x=2$



Ejemplo Polinomio de Langrange

Para obtener la ecuacion que pasa por todos los puntos se debe dejar variable x como incognita:

$$\begin{aligned}y &= \frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(0-1)(0-4)(0-6)}(2) + \\&\quad \frac{(x-0)(x-4)(x-6)}{(1-0)(1-4)(1-6)}(3) + \\&\quad \frac{(x-0)(x-1)(x-6)}{(4-0)(4-1)(4-6)}(18) + \\&\quad \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(6-0)(6-1)(6-4)}(38) \\y &= x^2 + 2\end{aligned}$$

Figura: Funcion para los 4 puntos

