7. Álgebra de Boole

Introducción

El éxito de la tecnología digital se basa en lo sencillo que resulta diseñar y fabricar circuitos cuyas entradas y salidas pueden tener sólo dos valores: 0 y 1

Este proceso de diseño se basa en el álgebra de Boole, un sistema matemático que permite formular proposiciones de lógica binaria por medio de símbolos

Los objetivos de este tema son:

- Introducir el álgebra de Boole: leyes, reglas y teoremas
- Describir la relación entre el álgebra de Boole y las puertas lógicas que consituyen los componentes básicos de los circuitos digitales

Estructura del tema

Introducción

Álgebra de Boole
- Conceptos básicos
- Suma booleana
- Producto booleano

Leyes y reglas del álgebra de Boole

Teoremas de DeMorgan

Resumen y bibliografía

Lógica binaria

La lógica es la parte del razonamiento humano que nos dice que una determinada proposición es verdadera si se cumplen ciertas condiciones

Las proposiciones lógicas pueden ser formuladas utilizando un sistema matemático que se denomina álgebra de Boole

Las proposiciones lógicas son binarias, es decir, sólo pueden tener dos estados: cierto y falso

Esto permite que el álgebra de Boole pueda aplicarse al diseño y análisis de sistemas digitales

Operaciones y expresiones booleanas

El álgebra de Boole es un sistema matemático que permite formular proposiciones de lógica binaria por medio de símbolos

De esta manera es posible resolver problemas de lógica binaria de forma matemática, utilizando operaciones y expresiones booleanas

Por este motivo, el álgebra de Boole resulta una herramienta muy adecuada para expresar y analizar las operaciones realizadas por los circuitos digitales

Conceptos básicos del álgebra de Boole

Magnitud lógica: indica un valor (sólo hay dos posibles: 0 y 1)

Variable: símbolo que se utiliza para representar una magnitud lógica (generalmente usaremos una letra)

Complemento: es el inverso de una variable y se representa colocando una barra encima de la variable, aunque a veces se representa con un apóstrofe

Literal: una variable o el complemento de una variable

Suma booleana

La suma booleana es equivalente a la operación OR, por lo que sigue las siguientes reglas:

$$0 + 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 0 = 1$$
$$1 + 1 = 1$$

Una suma de literales recibe el nombre de maxterm o también el de término suma

Un término suma en un circuito digital se implementa mediante puertas OR, sin que exista ninguna puerta AND en la expresión del circuito

Término suma

Dadas las reglas de la suma booleana, un término suma será igual a 1 cuando uno o más literales sean 1

Un término suma será igual a 0 si y sólo si cada uno de los literales que lo componen son 0

Por ejemplo, los valores necesarios para que esta expresión valga 0 son los siguientes:

$$A + \overline{B} + C + \overline{D} = 0$$
$$0 + 1 + 0 + 1 = 0$$
$$0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$A = 0 \quad C = 0$

$B = 1 \quad D = 1$

Multiplicación booleana

El producto o multiplicación booleana es equivalente a la operación AND y sigue las siguientes reglas:

$$0 \cdot 0 = 0$$
$$0 \cdot 1 = 0$$
$$1 \cdot 0 = 0$$
$$1 \cdot 1 = 1$$

Un producto de literales recibe el nombre de minterm o también el de término producto

Un término producto en un circuito digital se implementa mediante puertas AND, sin que exista ninguna puerta OR en la expresión del circuito

Término producto

Dadas las reglas de la multiplicación booleana, un término producto será igual a 1 si y sólo si cada uno de los literales que lo componen son 1

Un término producto será igual a 0 cuando uno o más literales sean 0

Por ejemplo, los valores necesarios para que esta expresión valga 1 son los siguientes:

$$A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D} = 1$$
$$1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0 = 1$$
$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$A = 1 \quad C = 1$

$B = 0 \quad D = 0$

Estructura del tema

Introducción

Álgebra de Boole
- Conceptos básicos
- Suma booleana
- Producto booleano

Leyes y reglas del álgebra de Boole

Teoremas de DeMorgan

Resumen y bibliografía

Leyes y reglas del álgebra de Boole

Existe una serie de leyes y reglas bien determinadas que deben seguirse para aplicar correctamente el álgebra de Boole

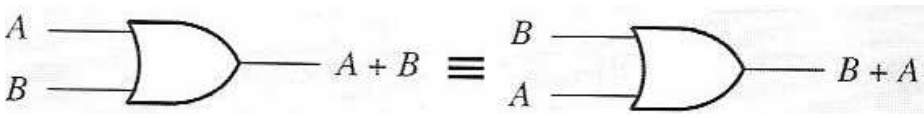
Vamos a estudiar las tres leyes más importantes
- Conmutativa
- Asociativa
- Distributiva

También veremos doce reglas básicas que se utilizan para la simplificación de expresiones booleanas

Ley conmutativa

La ley conmutativa de la suma establece que el orden en que se aplica a las variables la operación OR es indiferente

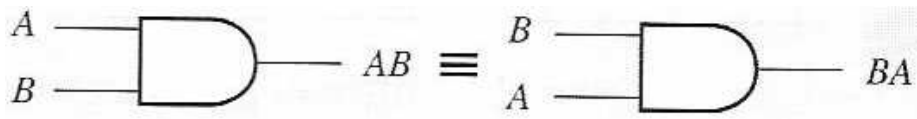
$$A + B = B + A$$



Ley conmutativa

La ley conmutativa de la multiplicación establece que el orden en que se aplica a las variables la operación AND es indiferente

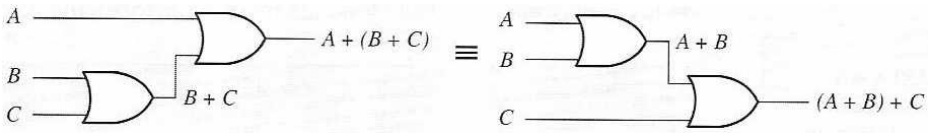
$$A \cdot B = B \cdot A \qquad AB = BA$$



Ley asociativa

La ley asociativa de la suma establece que, al aplicar la operación OR a más de dos variables, el resultado es el mismo independientemente de la forma en que se agrupen las variables

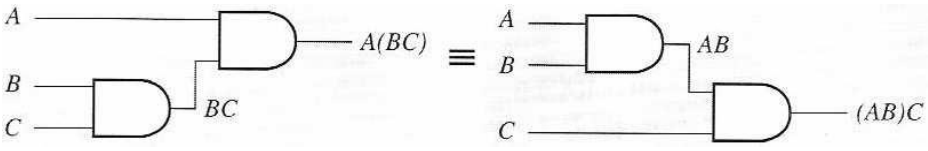
$$A + (B + C) = (A + B) + C$$



Ley asociativa

La ley asociativa de la multiplicación establece que, al aplicar la operación AND a más de dos variables, el resultado es el mismo independientemente de la forma en que se agrupen las variables

$$A(BC) = (AB)C$$



Puertas lógicas con más de dos entradas

La puerta NOT siempre tiene una única entrada

Las otras puertas tienen al menos dos entradas, aunque si cumplen la propiedad asociativa podrían tener más

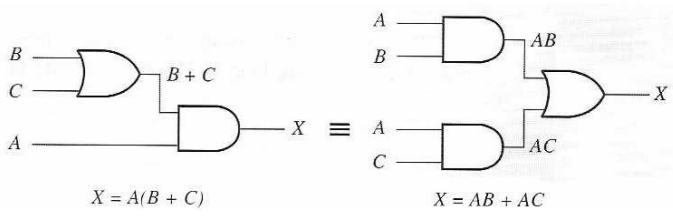
- Las puertas AND y OR implementan operaciones asociativas
- Las puertas NAND y NOR no son asociativas pero se pueden ampliar tratándolas como el complemento de AND y OR
- Las puertas XOR y XNOR son asociativas pero no suele ser necesario que tengan más de dos entradas, a parte de que el resultado no es intuitivo

Los diseñadores prefieren construir circuitos con puertas NAND y NOR de dos entradas porque son las que requieren menos transistores

Ley distributiva

Esta ley establece que aplicar la operación OR a dos o más variables y luego aplicar la operación AND al resultado de esta suma y a otra variable aislada es equivalente a aplicar la operación AND a la variable aislada con cada uno de los sumandos y luego aplicar la operación OR a los productos resultantes

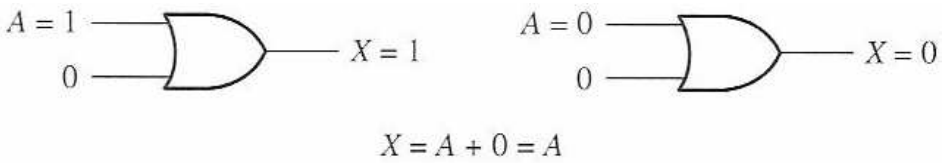
$$A(B + C) = AB + AC$$



Reglas del álgebra de Boole (1)

Si se aplica la operación OR a una variable cualquiera y a 0, el resultado es siempre igual a la variable

$$A + 0 = A$$



$X = A + 0 = A$

Reglas del álgebra de Boole (2)

Si se aplica la operación OR a una variable cualquiera y a 1, el resultado es siempre igual a 1

$$A + 1 = 1$$

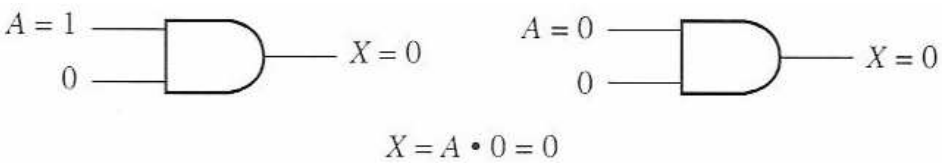


$X = A + 1 = 1$

Reglas del álgebra de Boole (3)

Si se aplica la operación AND a una variable cualquiera y a 0, el resultado es siempre igual a 0

$$A \cdot 0 = 0$$

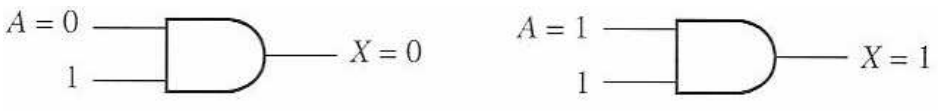


$X = A \bullet 0 = 0$

Reglas del álgebra de Boole (4)

Si se aplica la operación AND a una variable cualquiera y a 1, el resultado es siempre igual a la variable

$$A \cdot 1 = A$$

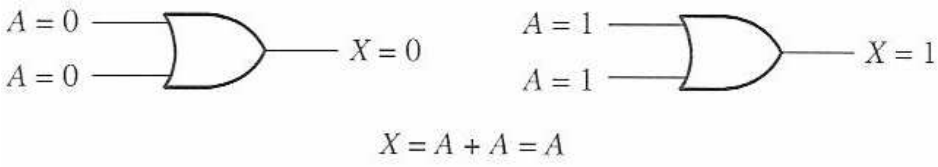


$X = A \bullet 1 = A$

Reglas del álgebra de Boole (5)

Si se aplica la operación OR a una variable consigo misma, el resultado es siempre igual a la variable

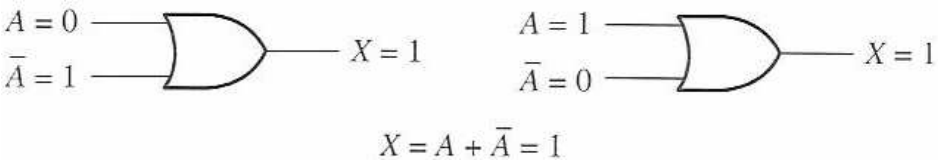
$$A + A = A$$



Reglas del álgebra de Boole (6)

Si se aplica la operación OR a una variable y a su complemento, el resultado es siempre igual a la 1

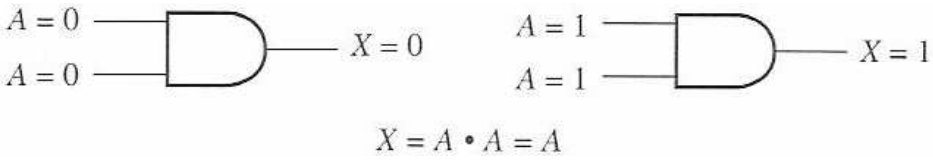
$$A + \overline{A} = 1$$



Reglas del álgebra de Boole (7)

Si se aplica la operación AND a una variable consigo misma, el resultado es siempre igual a la variable

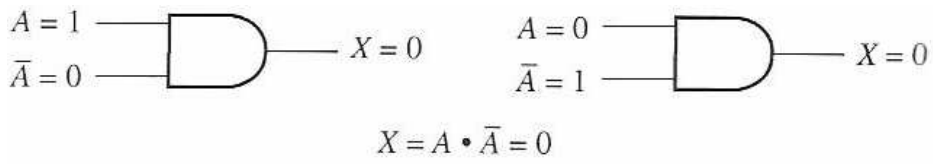
$$A \cdot A = A$$



Reglas del álgebra de Boole (8)

Si se aplica la operación AND a una variable y a su complemento, el resultado es siempre igual a 0

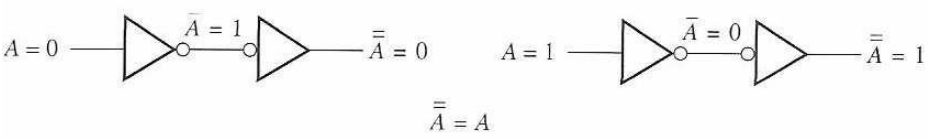
$$A \cdot \overline{A} = 0$$



Reglas del álgebra de Boole (9)

El complemento del complemento de una variable es siempre la propia variable

$$\overline{\overline{A}} = A$$



Reglas del álgebra de Boole (10)

Si se aplica la operación OR a una variable y al producto de esa misma variable con una segunda variable, el resultado es siempre igual a la primera variable

$$A + AB = A$$

$A + AB$	$= A(1 + B)$	sacar factor común A (ley distributiva)
	$= A \cdot 1$	$1 + B = 1$ (regla 2)
	$= A$	$A \cdot 1 = A$ (regla 4)

Reglas del álgebra de Boole (11)

Si se aplica la operación OR a una variable y al producto del complemento de esa misma variable con una segunda variable, el resultado es siempre igual a aplicar la operación OR a las dos variables

$$A + \overline{A}B = A + B$$

$A + \overline{A}B$	$= (A + AB) + \overline{A}B$	$A = A + AB$ (regla 10)
	$= A + AB + \overline{A}B$	ley asociativa
	$= A + (A + \overline{A})B$	sacar factor común B
	$= A + 1 \cdot B$	$A + \overline{A} = 1$ (regla 6)
	$= A + B$	$1 \cdot B = B$ (regla 4)

Reglas del álgebra de Boole (12)

Si se aplica la operación AND a la suma de dos variables y a la suma de la primera de éstas con una tercera variable, el resultado es siempre igual a aplicar la operación OR a la primera variable y al producto de las otras dos variables

$$(A + B)(A + C) = A + BC$$

$(A + B)(A + C)$	$= (A+B)A+(A+B)C$	ley distributiva
	$= AA+BA+AC+BC$	ley distributiva
	$= A + BA+AC+BC$	$A \cdot A = A$ (regla 4)
	$= A + AC+BC$	$A + BA = A$ (regla 10)
	$= A + BC$	$A + AC = A$ (regla 10)

Estructura del tema

Introducción

Álgebra de Boole

- Conceptos básicos
- Suma booleana
- Producto booleano

Leyes y reglas del álgebra de Boole

Teoremas de DeMorgan

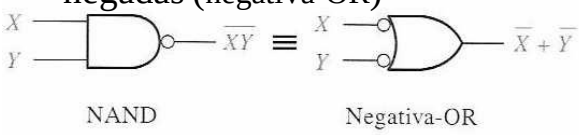
Resumen y bibliografía

Primer teorema de DeMorgan

El primer teorema de DeMorgan indica que el complemento de un producto de variables es igual a la suma de los complementos de las variables

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Este teorema establece la equivalencia entre una puerta NAND y una puerta OR con las entradas negadas (negativa-OR)



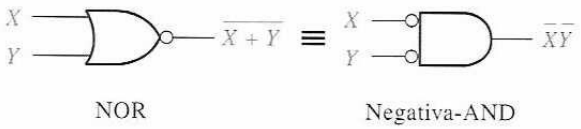
Entradas		Salida	
X	Y	$\overline{XY}$	$\overline{X} + \overline{Y}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Segundo teorema de DeMorgan

El segundo teorema de DeMorgan indica que el complemento de una suma de variables es igual al producto de los complementos de las variables

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Este teorema establece la equivalencia entre una puerta NOR y una puerta AND con las entradas negadas (negativa-AND)



NOR Negativa-AND

Entradas		Salida	
X	Y	$\overline{X + Y}$	$\overline{X}\,\overline{Y}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Aplicación a múltiples variables

Cada variable de las ecuaciones de DeMorgan puede representar una combinación de otras variables

Por ejemplo se pueden aplicar los teoremas de DeMorgan a la siguiente expresión:

$$\overline{(AB + C)(A + BC)}$$

$$\overline{(AB + C)} + \overline{(A + BC)}$$

$$(\overline{AB} \cdot \overline{C}) + (\overline{A} \cdot \overline{BC})$$

$$((\overline{A} + \overline{B}) \cdot \overline{C}) + (\overline{A} \cdot (\overline{B} + \overline{C}))$$

Ejemplo de aplicación

Partiendo de la expresión booleana de una puerta XOR, desarrollar la expresión booleana de una puerta XNOR

$\overline{A}B + A\overline{B}$	puerta XOR
$\overline{\overline{A}B + A\overline{B}}$	XNOR = XOR negada
$\overline{\overline{A}B} \cdot \overline{A\overline{B}}$	aplicando DeMorgan
$(A + \overline{B}) \cdot (\overline{A} + B)$	aplicando DeMorgan
$A\overline{A} + AB + \overline{A}\overline{B} + B\overline{B}$	ley distributiva
$0 + AB + \overline{A}\overline{B} + 0$	$A\overline{A} = 0$ (regla 8)
$AB + \overline{A}\overline{B}$	A + 0 = A (regla 1)

Estructura del tema

Introducción

Álgebra de Boole
- Conceptos básicos
- Suma booleana
- Producto booleano

Leyes y reglas del álgebra de Boole

Teoremas de DeMorgan

Resumen y bibliografía

Resumen

Los circuitos digitales pueden concebirse como un conjunto de operaciones de lógica binaria

El álgebra de Boole permite manipular estas operaciones lógicas de forma sistemática por medio de un conjunto de leyes, reglas y teoremas

Dominar el álgebra de Boole es muy importante para poder comprender el funcionamiento de los sistemas digitales y los procedimientos básicos que se utilizan para diseñarlos

Bibliografía

Sistemas Digitales - Principios y Aplicaciones - Tocci - 10th