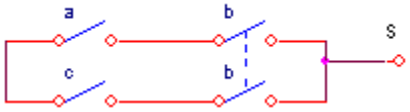
Algebra Booleana

Créditos: www.electronred.com

3.1. INTRODUCCIÓN

George Boole creó el álgebra que lleva su nombre en el primer cuarto del siglo XIX. Pretendía explicar las leyes fundamentales de aquellas operaciones de la mente humana por las que se rigen los razonamientos. En esa época nadie pudo prever la utilización de esta álgebra en el diseño de circuitos digitales.
Como veremos las operaciones se realizarán mediante relaciones lógicas, lo que en el álgebra convencional son las sumas y multiplicaciones. Las variables con las que opera son las binarias 1 y 0 (verdadero o falso). Los signos 1 y 0 no expresan cantidades, sino estados de las variables.
Podemos decir, que el sistema de numeración binario y el álgebra de Boole constituyen la base matemática para el diseño y construcción de sistemas digitales.
Se define Función Lógica a toda variable binaria cuyo valor depende de una expresión formada por otras variables binarias relacionadas mediante los signos + y x. Por ejemplo: S= (a.b)+b.c. Siendo S la función, mientras que a, b y c son las variables. Esta función la leeríamos de la siguiente forma: si a y b ó b y c son verdaderas (1) la función lógica S es verdadera(1).

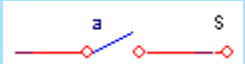
Mediante contactos podríamos explicar o aclarar la función lógica.



Tablas de verdad.- A través de las tablas de verdad se puede conocer teóricamente el comportamiento de las funciones lógicas, en función de los niveles que se aplican a la entrada. Más adelante veremos cómo además nos van a servir para diseñar circuitos digitales.

3.2. FUNCIONES BÁSICAS BOOLEANAS

a) Igualdad

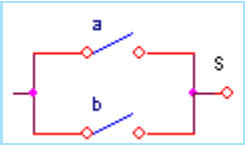
FUNCIÓN	TABLA DE VERDAD	
	a	S
S = a	0	0
	1	1
SÍMIL CON CONTACTOS		
		

b) Unión (función =O)

FUNCIÓN	TABLA DE VERDAD		
	a	b	S
S = a+b	0	0	0

0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**1**

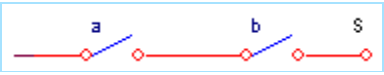
SÍMIL CON CONTACTOS



c) Intersección (función Y)

FUNCIÓN	TABLA DE VERDAD		
	a	b	S
S = a.b	0	0	0
	0	1	0
	1	0	0
	1	1	1

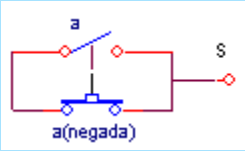
SÍMIL CON CONTACTOS



d) Negación (función NO)
También denomina función complemento

FUNCIÓN	**TABLA DE VERDAD**	
	a	S
$S = \overline{a}$	0	1
	1	0

SÍMIL CON CONTACTOS



3.3. POSTULADOS DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

a) Las operaciones del Álgebra de Boole son conmutativas.

a + b = b + a
a . b = b . a

b) Identidad

0 + a = a
1 . a = a

c) Cada operación es distributiva respecto de la otra:

a . (b + c) = a . b + a . c
a + b . c = (a + b) . (a + c)

d) Para cada elemento "a" existe un elemento complementario, $\bar{a}$. Se comprueba que:

$$a + \bar{a} = 1$$

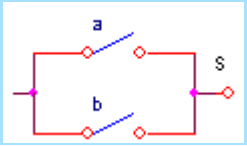
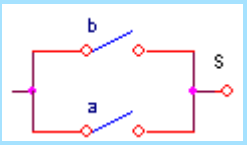
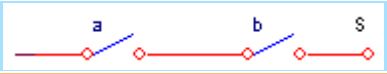
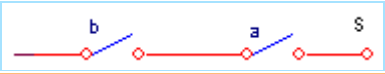
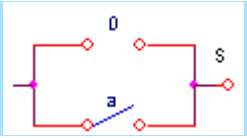
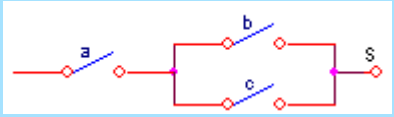
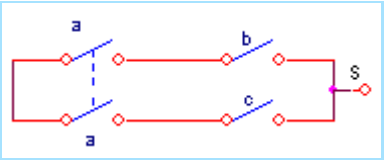
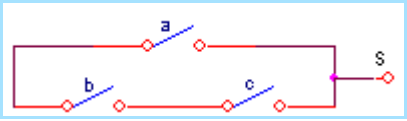
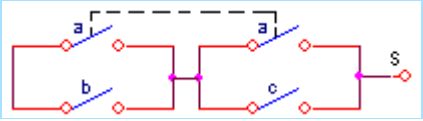
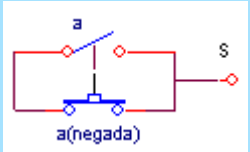
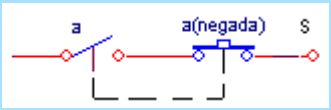
$$a \cdot \bar{a} = 0$$

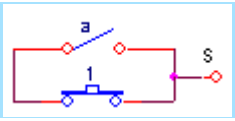
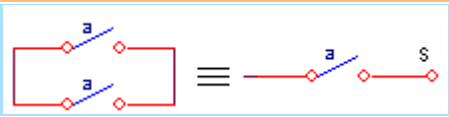
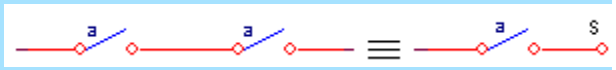
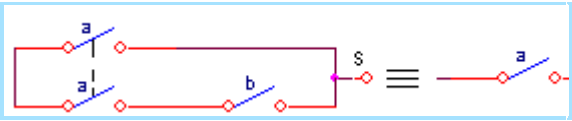
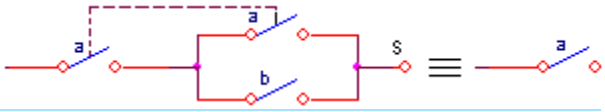
$$\bar{\bar{a}} = a$$

$$\overline{a + b + c} = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$$

$$\overline{a \cdot b \cdot c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$$

3.5. EL ÁLGEBRA DE BOOLE EN LENGUAJE DE CONTACTOS

POSTULADOS	
a. Propiedad conmutativa	
	
a + b	**b + a**
	
a . b	**b . a**
b. Identidad	
	
0 + a = a	**1 . a = a**
c. Propiedad distributiva	
	
a . (b + c)	**a . b + a . c**
	
a + (b . c)	**(a + b) . (a + c)**
d. Complementario o inversión	
	
$a + \bar{a} = 1$	$a \cdot \bar{a} = 0$
TEOREMAS	

Teorema 2	
	
a+1=1	**a.0=0**
Teorema 3	
	
a+a=a	**a.a=a**
Teorema 4. Ley de Absorción	
	
a+a.b=a	**a.(a+b)=a**

3.6. EJERCICIOS

1.	$\bar{a}\cdot b\cdot c+a\cdot\bar{b}\cdot c+a\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}+a\cdot b\cdot c$	Sol.- $a\cdot\bar{b}+b\cdot c$
2.	$(\bar{a}\cdot b)\cdot(\bar{a}+b)+a\cdot b\cdot\bar{c}+a\cdot b$	Sol.- b
3.	$\bar{a}\cdot b\cdot\bar{c}\cdot d+\bar{a}\cdot b\cdot\bar{c}\cdot\bar{d}+\bar{a}\cdot b\cdot c\cdot d+\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot c\cdot d$	Sol.- $\bar{a}\cdot(b\cdot\bar{c}+c\cdot d)$
4.	$a+\bar{a}\cdot b$	Sol.- $a+b$
5.	$a\cdot(a\cdot b+a\cdot\bar{b}+a\cdot b\cdot c+a\cdot b\cdot\bar{c}+\bar{a})$	Sol.- a
6.	$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot c+\bar{a}\cdot b\cdot\bar{c}+\bar{a}\cdot b\cdot c+a\cdot b\cdot\bar{c}+a\cdot b\cdot c$	Sol.- $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot c+b$
7.	$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot\bar{d}+\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot\bar{d}+\bar{a}\cdot b\cdot\bar{c}\cdot\bar{d}+\bar{a}\cdot b\cdot\bar{c}\cdot d+\bar{a}\cdot b\cdot c\cdot\bar{d}+\bar{a}\cdot b\cdot c\cdot d$	Sol.- $a\cdot b\cdot\bar{c}+\bar{a}\cdot b\cdot c+$
8.	$a\cdot b\cdot c\cdot d+a\cdot b\cdot c\cdot\bar{d}+a\cdot b\cdot\bar{c}\cdot d+a\cdot b\cdot\overline{c\cdot d}$	Sol.- $a\cdot b$
9.	$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot c+\bar{a}\cdot b\cdot\bar{c}+\bar{a}\cdot b\cdot c+a\cdot\bar{b}\cdot c$	Sol.- $\bar{a}\cdot b+\bar{b}\cdot c$
10.	$\overline{(\bar{a}+b)\cdot(\bar{c}+a)}$	

Enunciado 1 de algebra de Boole y álgebra de proposiciones

Teorema lB (principio de dualidad). Demostrar que cada aserción o identidad algebraica deducible de los postulados del álgebra de Boole sigue siendo válida si las operaciones " + " y " . " y los elementos identidad (1 y 0) se intercambian entre si.

Respuesta enunciado 1

Tomando los postulados (a) de Huntigton e intercambiando en ellos los operadores y elementos identidad resulta:

1a)	a + b = b + a	⇔	a . b = b . a	(1b
2a)	a + 0 = a	⇔	a . 1 = a	(2b
3a)	a + (b . c) = (a + b) . (a + c)	⇔	a . (b + c) = (a .b) + (a . c)	(3b
4a)	a + a’ = 1	⇔	a . a’ = 0	(4b

Es decir, que a partir de los postulados (a) se obtienen los postulados (b). Esto demuestra lo que nos habíamos propuesto.

Enunciado 2 de algebra de Boole y álgebra de proposiciones

Demostrar que para todos los elementos a, b, c de un álgebra de Boole se verifican los siguientes teoremas:

Idempotencia:	a + a = a	;	a . a = a
Elemento unidad:	a + 1 = 1	;	a . 0 = 0
Absorción :	a + (a . b) = a	;	a . (a + b) = a
Asociatividad:	a + (b + c) = (a + b) + c	;	a . (b . c) = (a . b) . c
Complemento único:	El elemento *a*' asociado al *a* es único		
Involución:	(*a*')' = *a*		
En cualquier álgebra booleana:	0' = 1	;	1' = 0
Leyes de Morgan	(*a* + b)' = *a*' . b'	;	(*a* . b)' = *a*' + b'
Relación de orden:	si a $\leq$ b $\Rightarrow$ a' + b = 1	;	si a $\leq$ b $\Rightarrow$ a' . b = 0
Sobre conjuntos:	Cada álgebra booleana que pueda formarse es isomorfa al álgebra de conjuntos.		

Respuesta enunciado 2

En los casos que precede solo demostraremos una parte de cada teorema, deduciendo la otra del principio de dualidad.

Idempotencia

Por los axiomas 4b y 2a tenemos :
a + 0 = a + (a . a') = a
y aplicando el axioma 3 a :
a + (a . a') = (a + a) . (a + a') = a
Finalmente, por los axiomas 4 a y 2 b :
(a + a) . (a + a') = (a + a) . 1 = a + a = a
Demostrado

Elemento unidad

Partiendo del axioma 2 b y aplicando también los axiomas 3 a, 2 b y 4 a, tenemos :
$1 + a = 1 . (1 + a) = (a + a') . (1 + a) = a + a' . 1 = a + a' = 1$
Demostrado.

Absorción
Aplicando los axiomas 2b y 3b, el teorema anterior y el axioma 3b de nuevo
$a + a.b = a.l + a.b = a(l + b) = a.l = a$
Demostrado

Asociatividad
Para este teorema demostraremos antes que se cumple
$a[(a + b) + c] = [(a + b) + c]a = a$

Esto es: (por el postulado 3b):
$a[(a+b) + c] = a(a+b) + a.c = a + a.c = a = [(a+b) + c]a$

donde hemos aplicado reiteradamente el teorema de absorci6n y finalmente el axioma de conmutatividad.

Con el anterior resultado supongamos que se tiene
$x = [(a+b) + c] . [a + (b + c)]$

aplicando los axiomas de distributividad nos queda :
$[(a+b) + c]a + [(a+b) + c].(b+c) = a + [(a+b) + c].(b.c)$

donde hemos aplicado el resultado anterior. Aplicando de nuevo la distributividad, e1resultado anterior y el teorema de absorción:

$a + \{[(a+b) + c].b + [(a+b) + c].c\} = a + \{b + [(a+b) + c].c\} = a + (b + c)$
Por otro lado, aplicando los axiomas de distributividad, el resultado anterior y el teorema de absorción, tenemos también:
$x = [(a + b) + c]. [a + (b + c)] = (a + b) [a + (b + c)] + c[a + (b + c)] =$
$= (a + b)[a + (b + c)] + c = \{a [a + (b + c)] + b[a + (b + c)]\} + c = (a + b) + c$
Por todo ello, teniendo en cuenta la propiedad transitiva de la igualdad:
$a + (b + c) = (a + b) + c$
Demostrado.

Elemento único
Para demostrar que el complemento definido por el postulado 4 es único, supongamos que existen dos elementos a'_1 y a'_2 que lo satisfacen. Esto es:

$a + a'_1 = 1 ; a + a'_2 = 1 ; a.a'_1 = 0 ; a.a'_2 = 0$

por los postulados 2b y 3b tendremos :
$a'_2 = 1.a'_2 = (a + a'_1).a'_2 = a.a'_2 + a'_1 . a'_2 = 0 + a'_1 . a'_2 = a.a'_1 + a'_1.a'_2 = (a + a'_2).a'_1 = 1.a'_1 + a'_1$

Demostrado.

Involución
Para demostrar el teorema de involución tenemos:
(a')' . a' = 0 ; (a')' + a' = 1
a . a' = 0 ; a + a' = 1

en consecuencia, tanto (a')' como a son complementos de a' por lo que, teniendo en cuenta el teorema anterior, se deberá cumplir :
(a')' = a
demostrado.

Propiedad de los elementos identidad de un álgebra de Boole
Teniendo en cuenta los axiomas 2 y 4 :
1' = 1' . 1 = 0 ; 0' = 0'+ 0 = 1
Demostrado.

Leyes de Morgan
Para demostrar las leyes de Morgan tenemos en cuenta que el complementario de cualquier elemento de un álgebra de Boole es único. Tenemos :
(a + b). ($\bar{a}$. $\bar{b}$) = a . ($\bar{a}$. $\bar{b}$) + b. ($\bar{a}$. $\bar{b}$) = (a . $\bar{a}$). $\bar{b}$ + (b. $\bar{b}$). $\bar{a}$ = 0. + 0. = 0
donde hemos aplicado el axioma de distributividad y el de conmutatividad y los teoremas de asociatividad y elemento unidad.
(a + b) + ($\bar{a}$. $\bar{b}$) = (a + b + $\bar{a}$).(a + b + $\bar{b}$) = [(a + $\bar{a}$) + b].[a + (b + $\bar{b}$)] = (1 + b).(a + 1) = 1
donde hemos aplicado los axiomas de distributividad conmutatividad y complementación y el teorema del elemento unidad.
Puesto que ($\bar{a}$. $\bar{b}$) cumple los axiomas requeridos para ser el complementario de (a+b) y éste debe ser único, hemos llegado donde queríamos.
Demostrado.

Relación de orden
Veamos ahora si la ecuación a' + b = 1 define una relación de orden :
Reflexiva : $\forall a \in B \;\Rightarrow\; a'+a=1 \;\Rightarrow\; a\,R\,a$

Antisimétrica: $\left\{\begin{matrix} a'+a=1 \\ a'+b=1 \end{matrix}\right\} \; a=b$ por el complemento único.

Transitiva: $\begin{cases} a\,R\,b \;\Rightarrow\; a'+b=1 \;\Rightarrow\; a' \;\; es\,el\,complementario\,de\,b \\ b\,R\,c \;\Rightarrow\; b'+c=1 \;\Rightarrow\; c \;\; es\,el\,complementario\,de\,b' \end{cases}$

De lo anterior se deduce:

c = b $\Rightarrow$ a' + c = 1 $\Rightarrow$ a R c
La implicación recíproca (a $\leq$ b $\Rightarrow$ a' + b = 1) es trivial.
Demostrado

Sobre conjuntos
Para demostrar el último apartado consideramos las relaciones:

$\cap \leftrightarrow$ "·" ; $\cup \leftrightarrow$ "+" ; $\emptyset \leftrightarrow 0$; $E \leftrightarrow 1$; $C(S) \leftrightarrow S'$

con esta transformación se comprueba fácilmente que el álgebra de conjuntos cumple los postulados de Huntington y, en consecuencia, es un álgebra de Boole.
Demostrado.

4.1. INTRODUCCIÓN

Puertas Lógicas.- es la unidad básica sobre la que se diseña un sistema digital. Pueden poseer una entrada o más y una sola salida. Son capaces de realizar funciones dando un nivel de tensión a la salida que puede ser alto o bajo. Alto significa 1 (H) y bajo significa 0 (L).

Las puertas lógicas básicas son: AND, OR, NAND, NOR, NOT, EX-OR, y EX-NOR.
Niveles Lógicos.- En TTL y CMOS los niveles de tensión en entradas y salidas no son fijos, hay fluctuaciones entre dos márgenes, tanto alto como bajo. En esta tabla comparativa entre las dos tecnologías se observan las diferencias que son capaces de soportar de niveles de tensión. Se dice que zona prohibida es aquella en la que no se puede garantizar un nivel lógico 1 o 0. Este es un concepto importante, pues en electrónica digital lo que pretendemos es enviar información fiable.

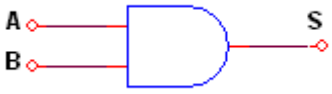
Tecnología	Zona prohibida entrada	Zona prohibida salida	V_{cc}	V_{IH}	V_{IL}	V_{OH}	V_{OL}
TTL	0.8 a 2v	0.4 a 2.4v	5v	2 a 5.5v	0 a 0.8v	2.4 a 5.5v	0 a 0.4v
CMOS	1.5 a 3.5v	0.01 a 4.99v	3 a 15v	3.5 a 5v	0 a 1.5v	4.99 a 5v	0 a 0.01v

Siendo:
V_{cc}= Tensión de alimentación de las puertas. En CMOS se ha supuesto dicha tensión en 5v.
V_{IH}= Nivel alto de tensión (H) de entrada (L)
V_{IL}= Nivel bajo de tensión (L) de entrada (L)
V_{OH}= Nivel alto de tensión (H) de salida (O)
V_{OL}= Nivel bajo de tensión (L) de salida (O)

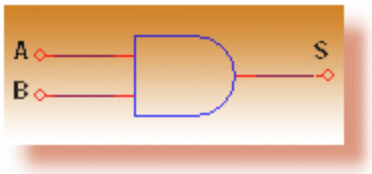
Tablas de verdad.- A través de las tablas de verdad se puede conocer teóricamente el comportamiento de las puertas lógicas, en función de los niveles que se aplican a la entrada. Más adelante veremos como además nos van a servir para diseñar circuitos digitales.

4.2. PUERTA AND

Lo que caracteriza esta puerta lógica es que para obtener a la salida un nivel alto (1, H) todas las entradas tienen que estar a 1. Es decir: Si A=1 y B=1□□ entonces S=1

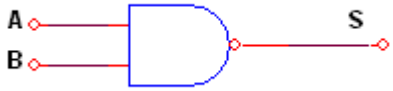
SÍMBOLO	FUNCIÓN
	**S = A . B**
TABLA DE VERDAD	**ANIMACION**

A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

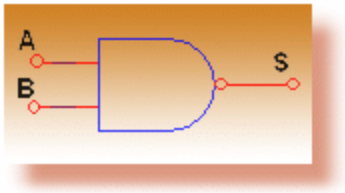


4.3. PUERTA NAND

Lo que caracteriza esta puerta lógica es que a la salida se obtiene un nivel bajo (0, L) cuando todas las entradas están a 1. Es decir: Si A=1 y B=1□□ entonces S=0.

SÍMBOLO	FUNCIÓN
	$S = \overline{A \cdot B}$
TABLA DE VERDAD	**ANIMACIÓN**

A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

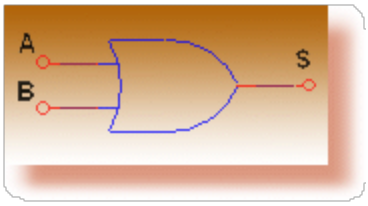


4.4. PUERTA OR

Siempre se obtiene un 1 a la salida, salvo que las entradas estén a 0.

SIMBOLO	FUNCION
	$S = A + B$
TABLA DE VERDAD	**ANIMACION**

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

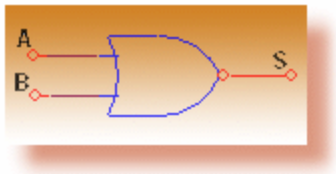


4.5. PUERTA NOR

Su respuesta es contraria a la de la puerta OR. Solo cuando tengamos nivel bajo de tensión en todas las entradas se obtendrá un nivel alto a la salida

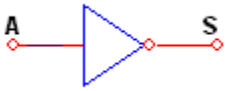
SIMBOLO	FUNCION
	$S = \overline{A + B}$
TABLA DE VERDAD	**ANIMACION**

A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

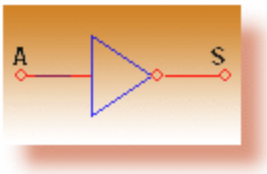


4.6. PUERTA NOT

También llamada puerta inversora, ya que, la información entregada a la entrada es la inversa a la salida.

SÍMBOLO	FUNCIÓN
	$S = \overline{A}$
TABLA DE VERDAD	**ANIMACION**

A	S
0	1
1	0

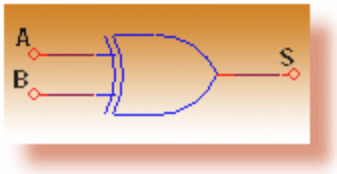


4.7. PUERTA EX-OR

También denominada Or Exclusive. La salida toma valor 1 cuando el estado lógico de las entradas es diferente, y tomará valor 0 cuando ambas tienen el mismo estado.

SIMBOLO	FUNCION
	$S = A \otimes B = (A \cdot \overline{B}) + (\overline{A} \cdot B)$
TABLA DE VERDAD	**ANIMACION**

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



4.8. TABLA RESUMEN DE PUERTAS LOGICAS

Entradas		SALIDA	SALIDA	SALIDA	SALIDA	SALIDA
A	**B**	**AND**	**OR**	**NAND**	**NOR**	**EX-OR**
0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0
Símbolo		