8. Análisis lógico de los circuitos digitales

Introducción

Los circuitos digitales están compuestos por un conjunto de puertas lógicas que implementan operaciones de lógica binaria

El álgebra de Boole permite describir estas operaciones lógicas, por lo que el funcionamiento de un circuito puede representarse utilizando una expresión booleana

Los objetivos de este tema son:

- Explicar cómo obtener una expresión algebráica que describa el funcionamiento de un circuito digital
- Distinguir entre las dos formas estándar que se utilizan para representar este tipo de expresiones: suma de productos y producto de sumas

Estructura del tema

Introducción

Análisis booleano de los circuitos lógicos

Expresiones en forma de suma de productos

Expresiones en forma de producto de sumas

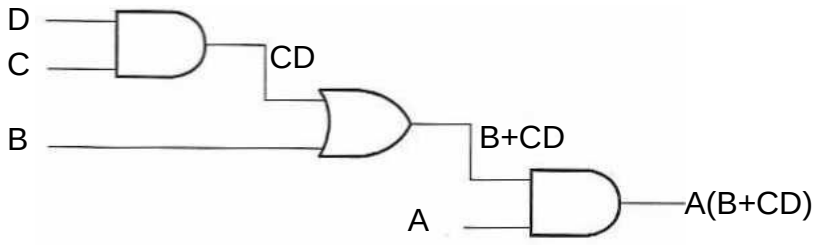
Relación entre ambas formas

Resumen y bibliografía

Análisis de circuitos lógicos

El álgebra de Boole permite expresar el funcionamiento de un circuito lógico de tal forma que la salida se pueda determinar a partir de los valores de entrada

Para obtener la expresión booleana de un circuito lógico se debe comenzar por las entradas situadas más a la izquierda e ir avanzando hacia las salidas



Elaboración de la tabla de verdad

Una vez obtenida la expresión booleana del circuito, se puede elaborar una tabla de verdad para representar su funcionamiento

A	B	C	D	CD	B+CD	A(B+CD)
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Formas estándar

Una metodología sistemática es vital para poder analizar y diseñar circuitos digitales de forma eficiente

Todas las expresiones booleanas, independientemente de su forma, pueden convertirse en cualquiera de dos formas estándar

- Suma de productos
- Producto de sumas

Las formas estándar permiten realizar de forma sistemática la simplificación y evaluación de expresiones booleanas

Estructura del tema

Introducción

Análisis booleano de los circuitos lógicos

Expresiones en forma de suma de productos

Expresiones en forma de producto de sumas

Relación entre ambas formas

Resumen y bibliografía

Suma de productos

Un término producto (minterm) se define como una expresión booleana que está compuesta por un producto de literales

Cuando dos o más términos productos se suman, la expresión resultante se denomina suma de productos

Cada término de una suma de productos puede ser

- Un término producto
- Una variable individual

La barra de negación en una suma de productos no debe extenderse nunca más allá de una variable

Suma de productos

Llamamos dominio de una expresión booleana al conjunto de variables que la componen

Los valores del dominio para que hacen que esta expresión valga 0 son:

$$A + \bar{A}B + BC \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 1 \end{cases}$$

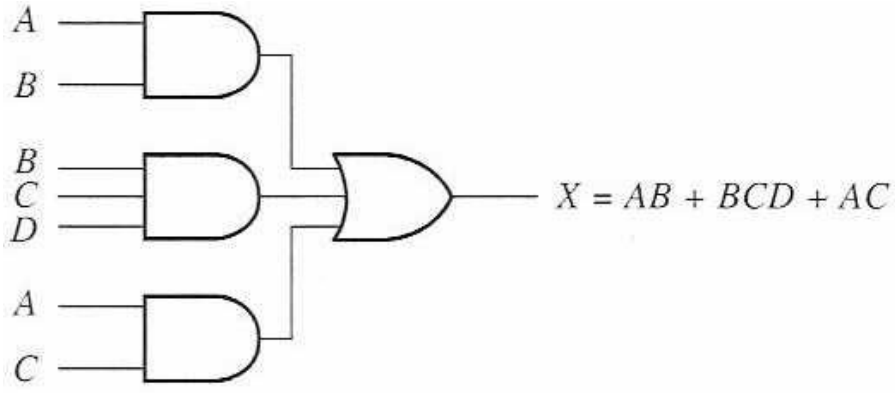
Para esta expresión no existe ninguna combinación de valores del dominio que la hagan valer 0

$$A + B + \bar{A}\bar{B}$$

Una suma de productos será igual a 1 si y sólo si uno o más de los términos producto que forman la expresión es igual a 1

Suma de productos

La implementación de una suma de productos requiere aplicar la operación OR a las salidas de dos o más puertas AND



Forma canónica de la suma de productos

En los ejemplos de expresiones que hemos visto, algunos términos no contenían todas las variables pertenecientes al dominio

$$A + \overline{A}B$$

La forma canónica de una suma de productos es aquella en la que todas las variables del dominio aparecen en todos y cada uno de los términos de la expresión

$$AB + A\overline{B} + \overline{A}B$$

Forma canónica de la suma de productos

La forma canónica de la suma de productos es muy importante para el diseño de circuitos digitales

Cualquier suma de productos puede convertirse a su forma canónica aplicando una de las reglas básicas del álgebra de Boole:

$$A + \overline{A} = 1$$

Simplemente se debe multiplicar cada término producto no canónico por la suma de la variable que falta y su complemento, ya que es lo mismo que multiplicar por 1

Forma canónica de la suma de productos

Siguiendo este método es sencillo transformar una suma de productos en su forma canónica

Ejemplo: $A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B} + AB\bar{C}D$

$A\bar{B}C = A\bar{B}C \cdot 1 = A\bar{B}C \cdot (D + \bar{D})$

$A\bar{B}C = A\bar{B}CD + A\bar{B}C\bar{D}$

$\bar{A}\bar{B} = \bar{A}\bar{B} \cdot 1 \cdot 1 = \bar{A}\bar{B} \cdot (C + \bar{C}) \cdot (D + \bar{D})$

$AB = ABCD + ABCD + ABCD + ABCD$

Forma canónica: $A\bar{B}CD + A\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}BCD + \bar{A}BC\bar{D} + AB\bar{C}D$

Tabla de verdad de la suma de productos

Una tabla de verdad es una lista de las posibles combinaciones de los valores de las entradas y el correspondiente valor de la salida

El primer paso para convertir una suma de productos a una tabla de verdad es convertir la expresión a su forma canónica

Para determinar el número de posibles combinaciones de entrada hay que tener en cuenta que el número de entradas es igual al número de variables del dominio

Tabla de verdad de la suma de productos

Una vez establecidos los posibles valores de las entradas hay que determinar los correspondientes valores de salida

Para esto, hay que tener en cuenta que para que una suma de productos sea 1 basta con que uno de los productos sea 1

Por lo tanto, hay que asignarle salida 1 a cada una de las combinaciones de entrada que haga valer 1 a alguno de los términos de la suma de productos

Tabla de verdad de la suma de productos

Siguiendo los pasos anteriores no resulta complicado calcular la tabla de verdad de la siguiente expresión:

$\overline{A}\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + ABC$

dominio de 3 variables

2^3 combinaciones de entrada

	A	B	C	
	0	0	0	0
$\overline{A}\overline{B}C$	0	0	1	1
	0	1	0	0
	0	1	1	0
$A\overline{B}\overline{C}$	1	0	0	1
	1	0	1	0
	1	1	0	0
ABC	1	1	1	1

Tabla de verdad de la suma de productos

Dado que es habitual representar un circuito por medio de su tabla de verdad, será frecuente la necesidad de calcular una expresión a partir de una tabla de verdad

A	B	C	
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$A\bar{B}\bar{C}$
$AB\bar{C}$
$ABC\bar{}$

$ABC + AB\bar{C} + ABC\bar{}$

Formas normalizadas de la suma de productos

La forma canónica de una expresión booleana es la que obtendremos a partir de su tabla de verdad, pero raramente tiene el menor número posible de operaciones

Se puede reducir la forma canónica a una forma que no tenga todas las variables en cada término, pero que necesite menos operaciones

No hay un método fijo, por lo que dada una función, puede resultar posible obtener varias de estas formas distintas, que son llamadas formas normalizadas

Formas normalizadas de la suma de productos

Las formas normalizadas pueden obtenerse a partir de la forma canónica aplicando leyes y reglas booleanas

Ejemplo: $ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$

$ABC + AB\bar{C} + ABC + A\bar{B}C + ABC + \bar{A}BC$

podemos replicar el término ABC porque ABC + ABC = ABC (regla 5)

$AB(C + \bar{C}) + AC(B + \bar{B}) + BC(A + \bar{A})$

aplicamos la ley distributiva para sacar factor común

$AB \cdot 1 + AC \cdot 1 + BC \cdot 1$

A + A = 1 (regla 6)

Forma normalizada: $AB + AC + BC$

Formas normalizadas de la suma de productos

Aunque a partir de las formas normalizada no es trivial obtener una tabla de verdad, resultan útiles para reducir la cantidad de puertas de un circuito digital

Es posible reducir más una forma normalizada, dando lugar a una forma no normalizada que tendrá menos operaciones, pero ya no podría expresarse como una suma de productos

$AB + AC + AD$		$A(B + C + D)$
forma normalizada 5 operaciones	factor común	forma no normalizada 3 operaciones

Estructura del tema

Introducción

Análisis booleano de los circuitos lógicos

Expresiones en forma de suma de productos

Expresiones en forma de producto de sumas

Relación entre ambas formas

Resumen y bibliografía

Producto de sumas

Un término suma (maxterm) se define como una expresión booleana que está compuesta por una suma de literales

Cuando dos o más términos suma se multiplican, la expresión resultante se denomina producto de sumas

Cada término de un producto de sumas puede ser

- Un término suma
- Una variable individual

La barra de negación en un producto de sumas no debe extenderse nunca más allá de una variable

Producto de sumas

El dominio de una expresión booleana es el conjunto de variables que la componen

Los valores del dominio para que hacen que esta expresión valga 1 son:

$$A \cdot (\overline{A}+B) \cdot (\overline{B}+\overline{C}) \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ (A+B)\,C = 0 \end{cases}$$

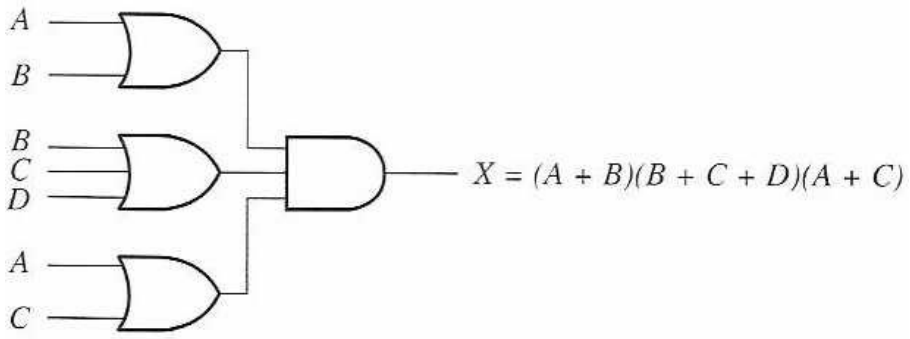
Para esta expresión no existe ninguna combinación de valores del dominio que la hagan valer 1

$$A \cdot B \cdot \overline{} \; \overline{}$$

Una producto de sumas será igual a 0 si y sólo si uno o más de los términos suma que forman la expresión es igual a 0

Producto de sumas

La implementación de un producto de sumas requiere aplicar la operación AND a las salidas de dos o más puertas OR



Forma canónica del producto de sumas

En los ejemplos de expresiones que hemos visto, algunos términos no contenían todas las variables pertenecientes al dominio

$$A \cdot (\overline{A}+B)$$

La forma canónica de un producto de sumas es aquella en la que todas las variables del dominio aparecen en todos y cada uno de los términos de la expresión

$$(A+B) \cdot (A+\overline{B}) \cdot (\overline{A}+B)$$

Forma canónica del producto de sumas

La forma canónica del producto de sumas también es muy importante para el diseño de circuitos digitales

Cualquier producto de sumas puede convertirse a su forma canónica aplicando una de las reglas básicas del álgebra de Boole:

$$A\overline{A} = 0$$

Simplemente se debe sumar cada término producto no canónico con el producto de la variable que falta y su complemento, ya que es lo mismo que sumar 0

Forma canónica del producto de sumas

Siguiendo este método es sencillo transformar un producto de sumas en su forma canónica

Ejemplo: $(A+\overline{B}+C)(\overline{B}+C+\overline{D})(A+\overline{B}+\overline{C}+D)$

$$A+\overline{B}+C = A+\overline{B}+C+0 = A+\overline{B}+C+(D\cdot\overline{D})$$
$$A+\overline{B}+C = (A+\overline{B}+C+D)(A+\overline{B}+C+\overline{D}) \quad \text{regla 12: } A+BC = (A+B)(A+C)$$

$$\overline{B}+C+\overline{D} = \overline{B}+C+\overline{D}+0 = \overline{B}+C+\overline{D}+(A\cdot\overline{A})$$
$$\overline{B}+C+\overline{D} = (A+\overline{B}+C+\overline{D})(\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D}) \quad \text{regla 12: } A+BC = (A+B)(A+C)$$

Forma canónica: $(A+\overline{B}+C+D)\ (A+\overline{B}+C+\overline{D})\ (A+\overline{B}+C+\overline{D})\ (\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D})(A+\overline{B}+\overline{C}+D)$

$(A+\overline{B}+C+D)\ (A+\overline{B}+C+\overline{D})\ (\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D})(A+\overline{B}+\overline{C}+D)$ regla 7: $A\cdot\overline{A} = A$

Tabla de verdad del producto de sumas

El primer paso para convertir un producto de sumas a una tabla de verdad es convertir la expresión a su forma canónica

Para obtener los valores de salida en la tabla de verdad hay que tener en cuenta que basta con que uno de los sumandos sea 0 para que un producto de sumas sea 0

Por lo tanto, hay que asignarle salida 0 a cada una de las combinaciones de entrada que haga valer 0 a alguno de los términos del producto de sumas

Tabla de verdad del producto de sumas

Siguiendo los pasos anteriores no resulta complicado calcular la tabla de verdad de la siguiente expresión:

$(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$

dominio de 3 variables

↓

2^3 combinaciones de entrada

	A	B	C	
	0	0	0	1
	0	0	1	1
	0	1	0	1
$A+\overline{B}+\overline{C}$	0	1	1	0
	1	0	0	1
$\overline{A}+B+\overline{C}$	1	0	1	0
	1	1	0	1
$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	1	1	1	0

Tabla de verdad de la suma de productos

Dado que es habitual representar un circuito por medio de su tabla de verdad, será frecuente la necesidad de calcular una expresión a partir de una tabla de verdad

A	B	C	
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$\overline{A+\overline{B}+C}$
$\overline{\underline{A}+\underline{B}+C}$
$\overline{A+B+C}$

$\overline{\quad}$ $\overline{(A+B+C)(A+B+C)(A+B+C)}$

Formas normalizadas del producto de sumas

A partir de la tabla de verdad obtenemos la forma canónica de una expresión booleana, aunque raramente tiene el menor número posible de operaciones

Al igual que con la suma de productos, se puede obtener formas normalizadas a partir de la forma canónica con el objetivo de reducir el número de operaciones necesarias

También se puede reducir más una forma normalizada, dando lugar a una forma no normalizada que tendrá todavía menos operaciones, pero que ya no estará expresada como un producto de sumas

Estructura del tema

Introducción

Análisis booleano de los circuitos lógicos

Expresiones en forma de suma de productos

Expresiones en forma de producto de sumas

Relación entre ambas formas

Resumen y bibliografía

Función booleana

En general, se define una función booleana como una expresión algebraica formada por variables, operadores, paréntesis y el signo igual

Para calcular el valor de una función booleana es preciso tener en cuenta el orden correcto de precedencia de operadores:

- Paréntesis
- NOT
- AND
- OR

Expresión de una suma de productos

Cualquier función booleana puede expresarse tanto con una suma de productos como con un producto de sumas

A	B	C		
0	0	0	0	
0	0	1	1	$A\bar{B}\bar{C}$
0	1	0	0	
0	1	1	1	$A\bar{B}C$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$AB\bar{C}$
1	1	0	0	
1	1	1	1	ABC

$F(A,B,C) = A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$

Expresión de un producto de sumas

Cualquier función booleana puede expresarse tanto con una suma de productos como con un producto de sumas

A	B	C		
0	0	0	0	A+B+C
0	0	1	1	
0	1	0	0	A+$\overline{B}$+C
0	1	1	1	
1	0	0	0	$\overline{A}$+B+C
1	0	1	1	
1	1	0	0	$\overline{A}$+$\overline{B}$+C
1	1	1	1	

$F(A,B,C) = (A+B+C)\,(A+\overline{B}+C)\,(\overline{A}+B+C)\,(\overline{A}+\overline{B}+C)$

Expresión de una suma de productos

Si numeramos cada una de las posibles combinaciones de entrada, podemos expresar una suma de productos como la suma de las combinaciones correspondientes a los términos producto que la componen

	A	B	C	
0)	0	0	0	0
1)	0	0	1	1
2)	0	1	0	0
3)	0	1	1	1
4)	1	0	0	0
5)	1	0	1	1
6)	1	1	0	0
7)	1	1	1	1

$F(A,B,C) = \sum(1,3,5,7)$

Expresión de un producto de sumas

Si numeramos cada una de las posibles combinaciones de entrada, podemos expresar un producto de sumas como el producto de las combinaciones correspondientes a los términos suma que la componen

	A	B	C	
0)	0	0	0	0
1)	0	0	1	1
2)	0	1	0	0
3)	0	1	1	1
4)	1	0	0	0
5)	1	0	1	1
6)	1	1	0	0
7)	1	1	1	1

$$F(A,B,C) = \prod(0,2,4,6)$$

Expresión de un producto de sumas

Dada una tabla de verdad

- Las combinaciones con salida 1 forman un suma de productos
- Las combinaciones con salida 0 forman un producto de sumas

Es fácil pasar de una forma a la otra: simplemente hay que elegir los números que no aparecen en la expresión

	A	B	C	
0)	0	0	0	0
1)	0	0	1	1
2)	0	1	0	0
3)	0	1	1	1
4)	1	0	0	0
5)	1	0	1	1
6)	1	1	0	0
7)	1	1	1	1

$$F(A,B,C) = \sum(1,3,5,7)$$

$$F(A,B,C) = \prod(0,2,4,6)$$

Estructura del tema

Introducción

Análisis booleano de los circuitos lógicos

Expresiones en forma de suma de productos

Expresiones en forma de producto de sumas

Relación entre ambas formas

Resumen y bibliografía

Resumen

El funcionamiento de un circuito digital suele representarse con una tabla de verdad que muestra el valor de la salida para cualquier valor de entrada

La aplicación del álgebra de Boole permite obtener, a partir de esta tabla, una expresión algebráica que describa el funcionamiento del circuito

La simplificación de esta expresión permite reducir el número de operadores, los cuales pueden representarse gráficamente usando los símbolos distintivos para obtener un diagrama descriptivo del circuito

Bibliografía

Sistemas Digitales - Principios y Aplicaciones - Tocci - 10th