

FRACTALES

Hace algo mas de diez años surgió con propiedad una nueva geometría recursiva o geometría fractal (creada por el matemático polaco Benoit Mandelbrot). La idea filosófica subyacente a esta geometría es que los objetos de la naturaleza son recursivos. Por ejemplo, un árbol, una nube o una costa son objetos tridimensionales que pueden ser explicados muy sencillamente en términos de ellos mismos. Esto no se puede hacer con la geometría euclidiana ya que ésta fue creada para describir objetos rectilíneos y no objetos irregulares (de hecho la palabra fractal quiere decir "fragmentado"). La recursión es una herramienta potente tanto de descripción de objetos, como de resolución de problemas.

La noción de recursión, formalizada a finales del siglo pasado, juega, hoy en día un papel importante en el desarrollo de disciplina tan variada y aparentemente disímil como las matemáticas (geometría fractal), las ciencias de computación (heurística), la pintura (fractales), la física (sistemas dinámicos) y la biología (modelos neuronales). El objetivo de esta lectura es utilizar el tema de los fractales para representar una introducción de las nociones básicas del concepto de recursión y ver la relación que tiene esta noción con la de sistema formal. Antes de intentar dar una definición comenzaremos con un ejemplo:

El ejemplo:

Observe las figuras que se presentan en la siguiente página. Esas figuras están relacionadas.

Si usted examina cuidadosamente las figuras, puede descubrir que cada figura se construye usando como base la figura anterior y transformándola de alguna manera.

Observe el paso de la primera figura a la segunda. Considere que este segundo paso es una transformación del segmento de recta, que es la primera figura, en un conjunto de cuatro segmentos de recta. Ahora, si usted observa la tercera figura, verá que ésta se obtiene de la segunda efectuando la misma transformación a cada uno de los cuatro segmentos que la componen. La cuarta figura es producto de hacer este mismo proceso de transformación a cada uno de los segmentos de recta que componen la tercera figura.



Además, vamos a adoptar dos convenciones:

- La primera figura siempre es un segmento de recta. Esto nos facilita las cosas porque entonces la segunda figura representa la transformación.
- La transformación estará siempre constituida por segmentos de recta.

Volviendo al dibujo, ¿ puede usted imaginarse cómo sería la siguiente figura? ¿podría dibujarla? Si usted sigue dibujando figuras cada vez mas complicadas, estas líneas forman figuras de líneas cada vez más pequeñas llamadas fractales y el proceso para pasar de una figura a otra es recursivo. De manera general un objeto recursivo está definido en términos de sí mismo, más precisamente, en términos de versiones más simples de sí mismo.

SISTEMAS FORMALES

Los fractales (como el ejemplo visto antes) tienen una característica muy importante para nosotros: pueden ser generados usando sistemas formales y en especial sistemas combinatorios.

De hecho hay una analogía muy profunda entre estas figuras recursivas y los sistemas formales. Consideremos el siguiente sistema formal:

Lenguaje: A, +, -.

Axioma A.

Regla: $A \rightarrow A-A++A-A$

Los sistemas formales que vamos a estudiar consisten en que hay que aplicar la regla a todas y cada una de las Aes que aparecen en la hilera a la que se está aplicando la regla.

Por ejemplo, el primer teorema que podemos obtener es sencillamente:

A-A++A-A

El segundo teorema, que se deduce de éste es:

A-A++A-A-A-A++A-A++A-A++A-A -A-A++A-A

Trate de escribir el tercer teorema. ¿cuántas Aes tiene el tercer teorema?, ¿tiene usted necesidad de contarlas, o se imagina alguna manera automática de encontrar ese número sin necesidad de contar? El número de Aes del n-ésimo teorema es igual al número de Aes de la regla por el número de Aes del teorema n-1.

Cuántas veces se repite el símbolo + en el tercer teorema? El número de + en el tercer teorema es igual al número de + en el primero, multiplicado por el número de Aes en el segundo teorema, mas el numero de + en el segundo teorema. Esta relación entre los teoremas y la regla, muestran claramente el proceso recursivo que se genera en los fractales: cada nivel está definido en términos más simples.

El sistema formal que acabamos de considerar tiene una relación estrecha con los dibujos del ejemplo que se hizo al comienzo de esta lectura, en el sentido que a cada teorema del sistema le corresponde un dibujo.

A continuación vamos a introducir un proceso que permite interpretar los elementos que constituyen un teorema para producir, a partir de él, un dibujo fractal.

INTERPRETACIÓN DEL SISTEMA FORMAL

Cada teorema de este sistema va a ser interpretado como un dibujo en el plano. Este dibujo lo va a efectuar una tortuga que colocaremos en nuestro papel de dibujo. Ella va a moverse de acuerdo a ciertas instrucciones y, al moverse, dejará tinta por cada sitio que pase. Convengamos además que la tortuga siempre comienza orientada hacia la derecha.

Démosle ahora a los símbolos de nuestro sistema la siguiente interpretación:

A: dibuje una línea recta de una unidad hacia delante (o sea en la dirección en la cual esté apuntando nuestra tortuga).

+: Gire 45° (en el sentido de las manecillas del reloj).

- : Gire 45° (en el sentido contrario de las manecillas del reloj).

Convengamos que + y - corresponden al mismo ángulo pero en dirección distinta.

Miremos ahora algunos teoremas e interpretémoslos:

Por ejemplo el axioma interpretado sería: muévase una unidad hacia delante:

Y el teorema A-A++A-A sería:

Muévase una unidad. Gire 45° en sentido negativo. Muévase una unidad. Gire 45° en sentido positivo. Gire 45° en sentido positivo. Muévase una unidad. Gire 45° en sentido negativo. Muévase una unidad.

Lo cual da la siguiente figura:



Observe que cada teorema de nuestro sistema corresponde a cierta figura en el plano o a un nivel en el proceso de obtener el fractal.

Aclaremos que, cuando se dibujan los niveles de un fractal, cada uno a partir del anterior, aplicando la transformación, todos los dibujos tienen el mismo tamaño en el sentido horizontal. Sin embargo, cuando interpretamos los teoremas, los dibujos que resultan tienen diferentes tamaños, dado que siempre se avanza una unidad cada vez que dibuja un segmento de recta.

Ejercicio.

Para el sistema formal que se propone a continuación deduzca los dos primeros teoremas y dibújelos de acuerdo a la interpretación propuesta.

Lenguaje: A, +, -

Axioma: A

Regla: $A \rightarrow - - A + + A - A$

Interpretación: + representa 45° .